

Elementos de Euclides

Índice

Proêmio	Página 1
Proclus	Página 1
Heron de Alexandria	Página 3
Pappus; A Synagoge	Página 3
Porfírio de Tiro; A Isagoge	Página 3
al-Nayrizi	Página 3
Simplício de Cilícia	Página 3
Téon de Alexandria	Página 4
Algumas notas sobre o califado abássida	Página 4
A Casa da Sabedoria	Página 5
Nasir al-Din al-Tusi	Página 6
Adelardo de Bath	Página 6
Campanus de Novara	Página 7
Erhard Ratdolt	Página 7
Gerardo de Cremona	Página 7
François Peyrard	Página 7
Bodleian Library MS. D'Orville 301	Página 8
Johan L. Heiberg	Página 8
Thomas L. Heath	Página 9
E. F. August	Página 9
Palimpsesto de Arquimedes	Página 9
Oxyrhynchus Papyri	Página 10
William de Moerbeke	Página 10
Henry Billingsley	Página 10
Constantinus Lascaris	Página 11
Bartolomeu Zamberti	Página 11
Simon Grynaeus	Página 11
Johannes Herwagen	Página 11
Federico Commandino	Página 11
Christopher Clavius	Página 12
David Gregory	Página 12
Niccolò Tartaglia	Página 12
A estrutura dos Elementos	Página 13
Quadro com três das principais edições dos <i>Elementos</i>	Página 15
O quinto postulado	Página 15
As geometrias não euclidianas	Página 16
Perfazimento	Página 16
Prontuário	Página 17

*In the glare of a light
I see a strange kind of sight*

Genesis, 1974

Neste tempo que nos coube habitar, repleto de presentes de profundas e impremeditáveis transformações, assistimos, um pouco atónitos, a uma aceleração do tempo real, que cuida de sonegar as contingências do conhecimento e a espessura do tempo accidental.

Como houvera sinalizado o filósofo e arquitecto francês Paul Virilio (1932 – 2018), “a aceleração do tempo torna o mundo plano” e no mundo plano “emergem os não-lugares onde a identidade dá lugar à rastreabilidade”, fazendo com que percamos, um pouco, a noção da perspectiva, pois já não vivemos o presente, vivemos o instante de uma realidade acelerada.

De modo avesso, a arte, a cultura e a ciência fazem apelo ao pensamento lento, carregando com elas a capacidade de introduzir distância, duração e densidade à nossa apreensão das múltiplas e diversas realidades que nos contaminam e nos interpelam.

Assim, nesta nossa jornada que se pretende de muitos prodígios, tentaremos calcorrear, placidamente, alguns dos muitos e assombrosos caminhos percorridos pelos *Elementos* de Euclides.

Adentremos então, serenamente, no singular mundo dos *Elementos* de Euclides, começando por referir que esta obra é um tratado sobre geometria, proporções e teoria dos números, escrito por Euclides de Alexandria por volta do ano 300 a.C.

Os treze livros que compõem Os *Elementos* constituem um dos mais antigos tratados gregos de Matemática que chegaram até nós. Ao escrevê-los, Euclides pretendia reunir, num texto único, todas as grandes descobertas matemáticas efectuadas até então. Dessarte, nos *Elementos* de Euclides podemos contemplar a teoria das proporções de Eudoxo de Cnido (408 a.C. – 355 a.C.), a teoria dos irracionais de Teeteto de Atenas (c. 417 a.C. – 369 a.C.) e a teoria dos cinco sólidos regulares de Platão (c. 427 a.C. – c. 347 a.C.).

Quase nada se sabe sobre a vida de Euclides, a não ser o que consta do que o neoplatónico Proclus (*Proclus Lycaeus*), “O sucessor” (c. 411 – 485), escreveu sobre os matemáticos relevantes da Grécia Antiga. De acordo com ele, Euclides ensinou em Alexandria, no tempo de Ptolomeu I, que governou o Egipto de 323 a.C. até 285 a.C. É muito provável que Euclides tenha estudado em Atenas, na Academia de Platão. Segundo Proclus, “Não muito mais novo do que esses (Hermodotus de Colophon e Philipus de Medma) era Euclides... Este homem viveu no tempo de Ptolomeu I. Porque Arquimedes, que veio imediatamente depois do primeiro (Ptolomeu), fez menção a Euclides: e depois, eles disseram que Ptolomeu uma vez perguntou-lhe se não havia na geometria um caminho mais curto do que o dos *Elementos*, e ele respondeu que não havia nenhuma estrada real para a geometria... ele é, então mais jovem que os alunos de Platão, mas mais velho que Eratóstenes e Arquimedes; porque os últimos foram contemporâneos um do outro, como Eratóstenes algures diz.”

É legítimo aferir, através das palavras de Proclus, que Euclides foi mediário entre os primeiros alunos de Platão e Arquimedes.

Do que se conhece sobre os registos da vida de Euclides é possível adiantar que Euclides viveu entre 325 a.C. e 265 a.C.

É de enfatizar que o comentário de Proclus ao primeiro livro dos *Elementos* de Euclides é considerado um dos mais extensos comentários de entre os muitos produzidos àquela obra. Sendo, também, uma das mais importantes fontes sobre a história dos matemáticos da Antiga Grécia, é tido como a primeira contribuição para a Filosofia da Matemática.

Proclus, que foi discípulo de Plutarco de Atenas, para além do comentário ao primeiro livro dos *Elementos* de Euclides, produziu, também, comentários às obras de outros grandes pensadores gregos como, e.g., Platão e Aristóteles, tendo o seu pensamento exercido uma grande influência, por exemplo, na Filosofia ocidental e na Filosofia islâmica.

A figura ao lado mostra-nos o frontispício da primeira edição latina do comentário de Proclus ao primeiro livro dos *Elementos* de Euclides, feita por Francesco Barozzi, em 1560.

Euclides, que se pensa que nasceu na cidade de Alexandria, é considerado, amiudadas vezes, o mais influente matemático da Antiguidade Clássica e um dos mais proeminentes vultos da História da Matemática.

Pensa-se que ensinou na Academia do Museu de Alexandria; sabe-se, isso sim, que Euclides fundou uma importante Escola de Matemática nessa cidade.

O seu tratado, *Os Elementos*, uma das mais importantes e preeminentes obras da história da Ciência, foi tido, desde a Antiguidade Clássica até ao Séc. XIX, como o exemplo acabado do raciocínio ordenado e rigoroso.



O trabalho de organização e de sistematização dos *Elementos* de Euclides é tão notável, que todos os tratados matemáticos anteriores foram menosprezados.

A luminosa, mas austera, beleza da Geometria Euclidiana foi, durante muitos séculos, vista como o vislumbre de um sistema formalmente perfeito.

Os Elementos de Euclides, que atravessaram as mais diversas fronteiras temporais, geográficas, linguísticas, culturais e civilizacionais, influenciaram o desenvolvimento do pensamento matemático por mais de 2000 anos! Têm, com efeito, uma importância ímpar na História da Matemática. Ou dito de outro modo, pedindo emprestado as ponderosas palavras de mais um insigne companheiro de jornada, David Stewart, da Universidade de Newcastle, podemos asseverar que “É impossível imaginar a Matemática como ela é actualmente sem os *Elementos* de Euclides”.

Devido à elegância dos raciocínios, ao assinalável rigor lógico e aos padrões metodológicos, os *Elementos* de Euclides exerceram, durante muitos séculos, uma grande influência sobre muitas outras áreas do pensamento científico.

Podemos recordar, a título de exemplo, que o filósofo holandês Bento de Espinosa (1632 – 1677), ao escrever a sua principal obra, *Ética*, recorreu ao método dedutivo, fazendo uso de definições, axiomas, teoremas e respectivas demonstrações.

É possível, com toda a legitimidade, assegurar que nenhuma outra obra — científica, filosófica ou literária — foi objecto de tantas edições! Os *Elementos* de Euclides, são um dos mais antigos textos (matemáticos) a serem impressos pouco tempo após a invenção da imprensa escrita — é um incunábulo — e é, por muitos, considerado o livro com um maior número de impressões a seguir à Bíblia!

A magnificência da obra e o assombro da história do seu percurso ao longo dos séculos podem ser enfatizados pelas imensas traduções, emendas, abreviações, comentários, escólios, observações e marginálias.

Neste nosso percurso, que se deseja de muitos sortilégios e de muitos encontros, apossemo-nos, denodadamente, das palavras de mais um destacado nome que nos ajudará a melhor divisar a grandeza dos *Elementos*, Simon Blackburn, da Universidade de Cambridge, que diz, de modo acurado, que os *Elementos* de Euclides foram considerados por mais de dois milénios “o exemplo supremo do exercício da razão humana” e “um paradigma de certeza racional”.

Sabe-se que os manuscritos autógrafos dos *Elementos* de Euclides, escritos em papiro, não sobreviveram e sabe-se, também, que os mais antigos manuscritos sobreviventes distam muitos séculos dos originais, o que dificulta sobremaneira a situação em termos de fiabilidade das cópias e das traduções conhecidas,

Na Antiga Grécia, o comentário mais antigo aos *Elementos* de Euclides foi feito por Heron de Alexandria (c. 10 – c. 75). Temos conhecimento de tal através de algumas referências feitas por Proclus no seu comentário ao Livro I, assim como das citações efectuadas pelo matemático persa al-Nayrizi (c. 865 – c. 922) ao longo do seu próprio comentário.

Ainda mais importante e também mais extenso do que o comentário de Heron de Alexandria, foi o comentário de Pappus de Alexandria (c. 290 – c. 350) que, entretanto, se perdeu, existindo, contudo, uma tradução para árabe do seu comentário ao Livro X.

Segundo Pappus, referindo-se a Apolónio de Perga: “ele passou muito tempo com os alunos de Euclides em Alexandria, e foi assim que adquiriu tal hábito científico de pensamento”.

Adiantaremos ainda, prazenteiramente, que Pappus, que também escreveu um comentário ao *Almagesto* de Ptolomeu, é considerado o último grande geómetra grego da Antiguidade Clássica. De entre os seus vários escritos, realçaremos a *Synagoge*, uma volumosa obra de pelo menos oito Livros, que foi de enorme relevância para o conhecimento dos mais importantes trabalhos realizados pelos matemáticos da Antiga Grécia, podendo ser considerada, com toda a justeza, uma Enciclopédia Matemática. A *Synagoge* passou a ser largamente conhecida na Europa após 1588, quando uma edição póstuma da tradução para latim, do matemático italiano Federico Commandino (1509 – 1575) da Escola de Urbino, foi impressa em Itália.

Parece que o comentário de Pappus aos *Elementos* de Euclides teve como base o comentário produzido por Porfírio de Tiro (c. 234 – 305). Sabe-se do comentário feito por Porfírio de Tiro através de Proclus. Porfírio de Tiro, esse nome grande do Neoplatonismo, discípulo de Plotino, escreveu, entre várias obras, um breve texto, a *Isagoge*, considerado uma “introdução” às *Categorias* de Aristóteles. A tradução de *Isagoge* do grego para o latim, levada a efeito por Boécio (c. 457 – c. 526), tornou-se a obra de referência para o estudo da Lógica durante toda a Idade Média na Europa, o mesmo acontecendo para o mundo árabe a partir da tradução feita pelo persa Ibn al-Muqaffa‘ (c. 720 – c. 757), tornando-se essa tradução um dos primeiros textos de Lógica traduzidos para árabe.

Tem-se, também, conhecimento de um comentário aos *Elementos* de Euclides levado a efeito por Simplicio de Cilícia (c. 490 – 560), através da tradução integral desse comentário, para

árabe, feita pelo já citado al-Nayrizi. Os comentários produzidos por Simplício de Cilícia foram de uma enorme importância para o conhecimento da Filosofia e da Ciência praticadas na Grécia Antiga. O comentário original de al-Nayrizi, juntamente com as traduções realizadas por si dos comentários de Heron e de Simplício aos *Elementos* de Euclides, constituem, provavelmente, um dos mais influentes textos matemáticos existentes na língua árabe, desempenhando um papel importante na História da Matemática.

O pai de Hipátia, Téon de Alexandria (c. 335 – 405), levou a efeito uma edição dos *Elementos* com algumas modificações, permanecendo essa como a mais fidedigna fonte grega para as subsequentes traduções para o árabe e para o latim até 1808, quando uma edição mais antiga foi encontrada no Vaticano, como descortinaremos mais adiante. Como breve nota, podemos mencionar que muitos dos manuscritos, baseados na edição de Téon de Alexandria, contêm nos seus títulos uma das seguintes referências: “da edição de Téon” ou “dos ensinamentos de Téon”.

Nesta nossa breve interrupção do bulício quotidiano que nos vai exaurindo, iremos chamar até nós mais um nome ilustre, Ricardo Reis, que tornará, de certeza, mais luzente este nosso andarilhar, com o seguinte verso, de uma sua ode: “Cada coisa a seu tempo tem seu tempo”.

Continuando nesta nossa mansa jornada, tentaremos perscrutar o percurso dos *Elementos* de Euclides no mundo árabe, onde foi considerado o mais importante texto matemático até ao início do Séc XIV. Começemos, numa nota introdutória, por fazer uma breve referência a Al-Mansur, o “Vitorioso”, (754 – 775), o segundo califa abássida e comumente considerado o verdadeiro fundador desse califado. Foi um desígnio seu a construção da cidade de Bagdade, a partir de 762, com o intuito de a estabelecer como a nova capital do califado. Sinalizaremos, ainda, que Al-Mansur é tido como o primeiro califa a patrocinar o movimento das traduções no mundo árabe, em particular de obras científicas. Com esse intuito, reuniu, por um lado, uma assinalável quantidade de obras de várias proveniências e, por outro, chamou até si renomados tradutores e académicos para se dedicarem à tradução, ao estudo, à reflexão, ao debate e à escrita. Nesse esforço de obtenção de obras para o incremento do saber no mundo árabe, Al-Mansur conseguiu obter, através de emissários seus enviados a Constantinopla, manuscritos matemáticos gregos, de entre os quais uma cópia dos *Elementos* de Euclides.

Posteriormente, o lendário Hārūn al-Rashīd (c. 766 – 809), quinto califa abássida, fez da sua governação um tempo de grande prosperidade e esplendor cultural e intelectual, de maneira que se assistiu, durante o seu reinado, à Era Dourada do Islão, em que a capital do califado, a deslumbrosa Bagdade, floresceu de modo tal que se tornou uma das mais imponentes cidades daquela época, onde ressaíam opimos vultos de várias áreas como académicos, poetas, músicos ou bailarinos. Algumas das suas fabulosas proezas surgem retratadas no fantástico livro “As Mil e uma Noites”.

Para estimular um ambiente de elevado brilho cultural, Hārūn al-Rashīd sabia ser de vital importância levar a cabo a tradução para o árabe do saber de várias paragens, como, por exemplo, da Grécia Antiga, Índia, Pérsia e Síria, particularmente nas áreas das Ciências, Matemática, Medicina e Filosofia. Assim, conseguiu ajuntar os mais ilustres tradutores, como já houvera feito o califa Al-Mansur, mandando, paralelamente, edificar uma magnificente biblioteca que, para além de albergar o esplêndido acervo de obras notáveis, entretanto adquiridas, tinha também como propósito facultar um ambiente propício à tradução, ao estudo e à reflexão.

Historiadores como Eginardo (c. 770 – 840), discípulo de Alcuíno de York (735 – 804), fazem referência a emissários viajando entre as cortes de Hārūn e do imperador franco Carlos Magno (742 – 814), tal era o reconhecimento mútuo da reputação e do prestígio entre as duas cortes.

Prosseguindo o esforço do seu pai, Hārūn al-Rashīd, para continuar a prover Bagdade de um refulgente ambiente intelectual, Abu Al-Mamun (786 – 833), sétimo califa abássida, ampliou e tornou pública a biblioteca particular do seu pai, transformando-a num esplendoroso centro do saber, chamada “Bayt al-Hikma” (a Casa da Sabedoria). Para continuar a incentivar e a promover a tradução, o estudo, a escrita e a discussão, Al-Mamun reuniu, também ele, agora na denominada Casa da Sabedoria, uma plêiade de renomados estudiosos e tradutores e, assim, numerosas obras de diversas áreas do saber e em diferentes línguas — como, por exemplo, sânscrito, chinês, siríaco e grego — foram lá traduzidas.

Num breve apontamento, referiremos que durante a sua campanha do Egipto, Abu Al-Mamun levou consigo um conjunto de académicos na tentativa de decifrar a escrita hieroglífica que, como é sabido, só foi conseguida em 1799, após a descoberta da Pedra da Roseta.

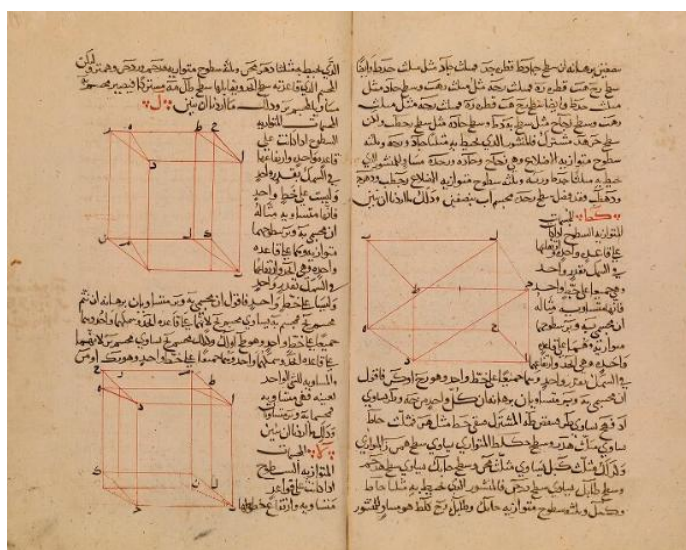
Nesta nossa suspensão da sofreguidão absurda que nos vai consumindo, acharemos tempo, nesta nossa jornada, para nos embrenhar por alguns atalhos que, de certeza, tornarão mais rutilante esta nossa itinerância que se pretende de muitos encantamentos. Desta feita, faremos um desvio breve para referir que o ilustre polímata persa al-Khwarizmi (c. 780 – c. 850) foi um dos grandes vultos da Casa da Sabedoria. A sua mais importante obra, *Hisab al-jabr w' al-muqabala*, pode ser considerada o primeiro tratado de álgebra; é de referir que do título desse tratado derivou a palavra “álgebra”.

Retomando o curso dessa nossa deambulação, poderemos depreender que o assombro causado pelos *Elementos* de Euclides nos matemáticos islâmicos foi de tal ordem que levou a inúmeras traduções dessa impressionante obra, a partir do Séc. IX, das quais faremos menção a três. Duas foram efectuadas por um dos mais influentes tradutores árabes do seu tempo, Al-Hajjaj ibn Yusuf ibn Matar (786 – 833); a primeira, segundo algumas fontes, destinada ao califa Hārūn al-Rashīd.

Essa tradução, que se pensa que se perdeu, foi a primeira tradução dos *Elementos* de Euclides do grego para o árabe.

A segunda tradução, melhorada e mais concisa em relação à primeira, foi para o califa Al-Mamun. Desta segunda tradução apenas se conhecem alguns fragmentos.

A terceira tradução foi efectuada por outro grande tradutor árabe, Ishāq ibn Hunayn (c. 830 – c. 910), a qual foi revista

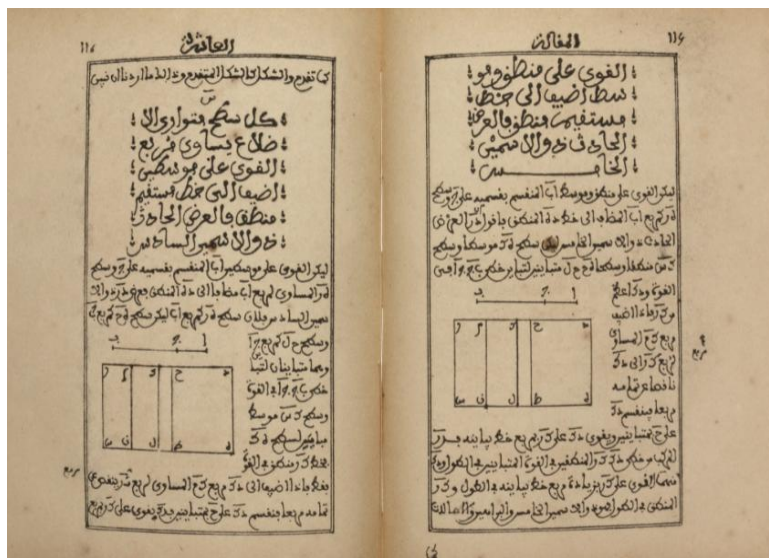


pelo matemático islâmico Thābit ibn Qurrah (c. 836 – 901), que parece ter tido acesso a outros manuscritos gregos.

Dois manuscritos daquela edição encontram-se na Biblioteca Bodleiana (Bodleian Library), na Universidade de Oxford. Na figura da página anterior, podem-se ver duas páginas de um dos manuscritos que se encontram na Biblioteca Bodleiana.

A tradução de Ishāq ibn Ḥunayn, com a revisão de Thābit ibn Qurrah, tornou-se numa edição de referência, de tal sorte que serviu de base para a “Exposição dos Elementos de Euclides”, o tratado produzido pelo persa Nasir al-Din al-Tusi (1201 – 1274), matemático e filósofo de grande erudição, conhecido como o “O terceiro professor”, a seguir a Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) e Abu Nasr Al-Farabi (c. 878 – c. 950).

O trabalho de Nasir al-Din al-Tusi, “Exposição dos *Elementos* de Euclides”, não é uma mera tradução do texto de Euclides, mas um esforço de reescrever os *Elementos*, acrescentando muitas demonstrações alternativas às que constam do texto original, inserindo, inclusive, alguns comentários. Essa edição teve um profundo impacto, pois foi através dela que o conhecimento de Euclides chegou, primeiramente, a Espanha,



difundindo-se depois pelo resto da Europa, muito antes de qualquer edição grega ter sido conhecida. A primeira edição impressa dessa tradução foi efectuada em Roma, em 1594, tornando-se numa das primeiras obras impressas em árabe, surgindo, posteriormente, uma edição, em latim, em Londres, no ano de 1657. A imagem anterior mostra duas páginas de um exemplar da edição em árabe.

É de sublinhar que, conjuntamente com os *Elementos* de Euclides, a tradução de Ishāq ibn Ḥunayn, e posterior revisão de Thābit, do *Almagesto* de Ptolomeu tornaram-se traduções de referência das respectivas obras para árabe.

A mais antiga tradução completa dos *Elementos* do árabe para o latim, atribuída ao escolástico inglês Adelardo de Bath (c. 1075 – c. 1160), foi feita, provavelmente a partir de uma das traduções de Al-Hajjaj ibn Yusuf ibn Matar, no início do Séc. XII, talvez por volta de 1120.

A Adelardo de Bath, um dos grandes académicos do período medieval, são atribuídas três versões, em latim, dos *Elementos* de Euclides, embora só as duas primeiras sejam traduções, sendo a terceira versão um comentário à obra.

A segunda tradução efectuada por Adelardo de Bath foi, até ao Séc. XVI, o texto de referência utilizado nas escolas da Europa para o estudo da Matemática.

Na figura ao lado, surge-nos uma iluminura que aparece num manuscrito baseado na tradução de Adelardo de Bath.



Por volta de 1260, Campanus de Novara (1220 – 1296) levou a efeito uma edição dos *Elementos* de Euclides, com comentários seus, baseada, presumivelmente na sua maior parte, na segunda tradução de Adelardo de Bath. A primeira edição impressa dos *Elementos* de Euclides, de Campanus, foi feita em Veneza, em 1482, pelo alemão Erhard Ratdolt (1442 – 1528), um dos tipógrafos e impressores mais criativos nos finais do Séc. XV e princípios do Séc. XVI. Erhard Ratdolt teve a arte de incluir nas páginas dessa obra mais de quatrocentas complexas xilogravuras que ilustravam os textos, embora nem sempre aquelas estivessem alinhadas com as proposições que pretendiam ilustrar.

A edição impressa dos *Elementos* de Euclides, de 1482, foi a primeira obra saída do prelo a conter figuras geométricas; na figura ao lado pode-se ver duas páginas da edição impressa por E. Ratdolt com anotações nas suas margens. Essa edição é considerada, ainda hoje, como uma obra-prima da História da Ciência.

Adiantaremos, no entanto, que aquela que, ainda hoje, é considerada a melhor tradução



dos *Elementos*, do árabe para latim, foi realizada pelo académico italiano Gerardo de Cremona (c. 1114 – 1187), a partir das versões de Ishāq, com revisão de Thābit.

Gerardo de Cremona é considerado o mais proeminente tradutor da Escola de Toledo e, também, um dos mais prolíficos tradutores de obras científicas e filosóficas do árabe para latim durante a Idade Média.

A tradução de textos científicos do grego e do árabe para latim, nos séculos XII e XIII, pode ser encarada como um factor determinante para uma das maiores transformações na ciência ocidental, comparável, em importância, à tradução de textos científicos para o árabe, durante a Era Dourada do Islão e à Revolução Científica na Europa do século XVII.

Neste nosso sereno e calmo vaguejar, que começou com a companhia de Paul Virilio, iremos convidando quem nos possa acompanhar, acrescentando lustre ao nosso plácido percurso, convocando, desta feita, o poeta e teólogo José Tolentino Mendonça, para recordar estas suas incisivas palavras “desconhecemos o que seja uma habitação serena do tempo”!

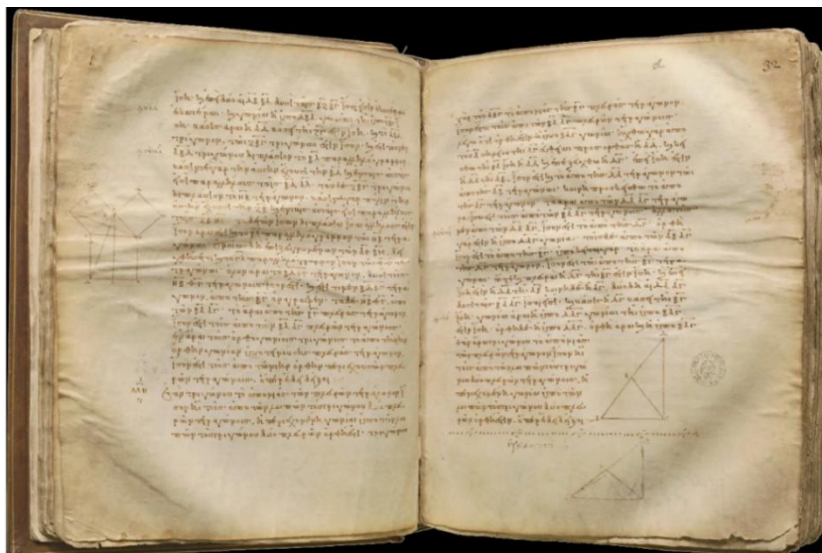
Como atrás fora mencionado, a edição dos *Elementos* de Euclides de Téon de Alexandria foi, durante muitos séculos, considerada a mais antiga fonte dos *Elementos* até 1808, quando o insigne matemático francês François Peyrard (1760 – 1822) identificou, pela primeira vez no Vaticano, uma versão pristina, até então desconhecida, anterior à edição de Téon de Alexandria, com o seguinte registo Vat.gr. 190 (P). A partir desse manuscrito, François Peyrard publicou em Paris, entre 1814 e 1818, os *Elementos* de Euclides em grego, latim e francês, sendo aquela considerada a melhor tradução, dos *Elementos* de Euclides, vertida para francês. Numa breve parentetização, referiremos, de modo prazeroso, que François Peyrard, que foi bibliotecário da École Polytechnique de França, traduziu, também, Arquimedes, Horácio e Cornelius Agrippa.

Enfatizaremos, entretanto, que o mais antigo manuscrito “completo” dos *Elementos* de Euclides, baseado na edição de Téon de Alexandria, e datado de 888 A.D., encontra-se na Biblioteca Bodleiana da Universidade de Oxford, com a seguinte referência Bodleian Library MS. D'Orville 301. Esse manuscrito foi redigido, em pergaminho, pelo calígrafo bizantino Stephanus Clericus por solicitação de Aretas de Patras, que chegou a ser Arcebispo de Cesareia, na Capadócia.

Segundo o catálogo de exposições da Biblioteca Bodleiana, é o mais antigo manuscrito de um autor grego clássico a ter uma data precisa.

A figura à direita mostra-nos uma imagem daquele manuscrito, onde se pode observar a Proposição 47 (Teorema de Pitágoras), que surge no Livro I.

Retornando à descoberta de François Peyrard, sabemos que o códice encontrado no Vaticano é anterior à edição levada a cabo por Téon de Alexandria e é, ainda, o que mais se aproxima do texto original dos *Elementos* escrito por Euclides.



Tal decorre, para além de outras diferenças encontradas nos dois manuscritos, do facto de Téon de Alexandria, no seu comentário ao *Almagesto* de Ptolomeu, ter referido ser da sua autoria uma adenda que surge na última proposição do livro VI da sua edição dos *Elementos*, adenda essa que não consta dos manuscritos descobertos no Vaticano.



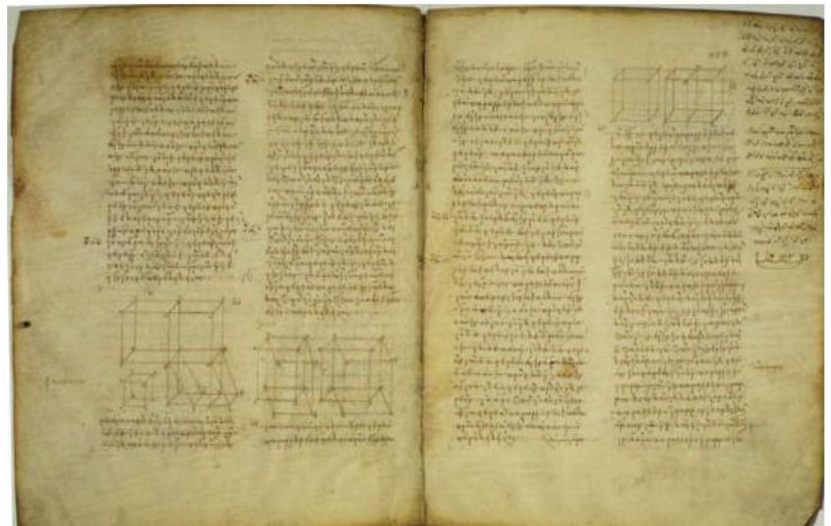
Na figura à esquerda, podemos ver a Proposição 47 (Teorema de Pitágoras) que surge no Livro I, dos *Elementos* de Euclides, no exemplar grego que se encontra na Biblioteca do Vaticano.

Consegue-se, também, observar as muitas anotações marginais nas páginas daquele manuscrito.

Do mesmo exemplar, podemos divisar, na primeira figura da página seguinte, as Proposições 31 – 33 (acerca de volumes de paralelepípedos), que surgem no Livro XI. Pode-se observar, também nestas páginas, algumas anotações marginais.

A partir daquele manuscrito encontrado no Vaticano por François Peyrard, juntamente com apurados estudos sobre outras edições dos *Elementos*, o mui distinto filólogo e historiador dinamarquês Johan L. Heiberg (1854 – 1828) reconstruiu uma edição, em grego, semelhante à

versão original de Euclides, que foi publicada entre 1883 e 1888. Alumbremos um pouco mais esta nossa jornada, adiantando que Johan L. Heiberg foi professor de Filologia Clássica e de Arqueologia na Universidade de Copenhaga, foi membro da Academia Real Dinamarquesa de Ciências e Letras e foi, ainda, presidente da Fundação Rask-Ørsted.



Foi aquela edição de Johan L. Heiberg dos *Elementos* que o renomado académico inglês Sir Thomas L. Heath (1861 – 1940) traduziu para inglês, com introdução e comentários seus, numa primeira edição em 1908, surgindo uma segunda edição, no ano de 1926, considerada a edição de referência dos *Elementos* de Euclides em língua inglesa. No seu notável labor, Sir Thomas L. Heath traduziu, ainda, para inglês, Diofanto de Alexandria, Apolónio de Perga e Aristarco de Samos, traduzindo, também, Arquimedes, como veremos um pouco mais adiante. Sir Thomas L. Heath foi eleito membro da Royal Society em 1912.

Daremos ainda nota, num curto interlúdio, da última edição, em grego, dos *Elementos* de Euclides a preceder a edição de Johan L. Heiberg. Tratou-se de uma concisa, clara e muito cuidada edição, levada a efeito pelo matemático alemão E. F. August, nos anos 1826 a 1829, suportando-se no manuscrito do Vaticano, numa tentativa de melhorar a edição de Simon Grynaeus, da qual falaremos mais adiante.

Nesta nossa serena suspensão do frenesim que nos tem vindo a afadigar, teremos tempo para enfatizar então, de modo prazeroso, o encontro de Johan L. Heiberg, em 1906, com o palimpsesto dum códice que se encontrava num mosteiro Ortodoxo Grego em Constantinopla sob a forma de um livro de orações escrito no Séc. XIII. Após o seu tratamento e decifração por parte de Johan L. Heiberg, verificou-se que aquele palimpsesto, conhecido actualmente como Palimpsesto de Arquimedes, era originalmente uma cópia grega bizantina de uma compilação de tratados de Arquimedes e de outros autores.

O extraordinário trabalho levado a efeito por Johan L. Heiberg e, posteriormente, por outros académicos, permitiu-nos ficar diante de autênticas preciosidades, entre as quais O Método, o que ajudou a trazer uma nova e mais radiante luz sobre o génio desse grande vulto da Antiguidade Clássica: Arquimedes de Siracusa (c. 287 – c. 212).

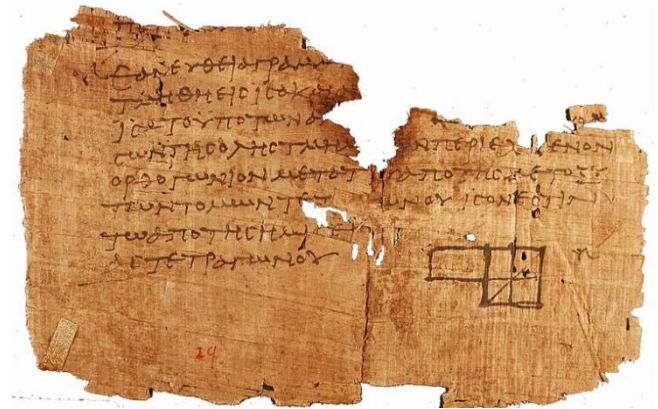
A figura à direita mostra-nos dois fólhos do Palimpsesto de Arquimedes, onde se pode ver



textos escritos por Arquimedes detrás do texto do livro de orações.

Após termos deambulado por este pequeno atalho para evocarmos, jubilosamente, o nome do maior matemático da Antiguidade Clássica, retomemos o nosso andarilhar para convocar mais uma vez Proclus, o último grande filósofo da Grécia Antiga, não sem antes vermos na

figura à direita, um fragmento do segundo livro dos Elementos, em grego, descoberto no Egito, em 1897, e que é parte dos *Oxyrhynchus Papyri*. Esse fragmento, onde se pode observar o diagrama que acompanha a proposição 5 do referido Livro II, encontra-se, actualmente, na Universidade da Pensilvânia. Parece que remonta a uma data entre os anos 75 e 125, sendo, assim, parte de uma edição anterior às que se encontram no Vaticano e na Biblioteca Bodleiana.



Recuperemos, então, o nome de Proclus para assinalar que, para além do seu impreterível contributo para o conhecimento da vida dos matemáticos da Antiga Grécia, desempenhou, igualmente, um papel crucial na transmissão da filosofia de Platão da Antiguidade Clássica para a Idade Média. As traduções para latim de muitas obras de Proclus — em particular os “Elementos de Teologia”, a sua mais importante obra — levadas a cabo, no Séc. XIII, pelo académico e clérigo flamengo William de Moerbeke (c. 1215 – c. 1286) tornaram-se na principal fonte para o conhecimento da filosofia Platónica durante o período medieval. De referir, com toda a justeza, que os “Elementos de Teologia”, exerceram uma grande influência em, por exemplo, Marsílio Ficino, um dos maiores representantes do Humanismo florentino, no já citado Heinrich Cornelius Agrippa, um influente escritor do esoterismo da Renascença ou em Pico della Mirandola, um dos nomes maiores do renascimento.

Prossigamos, então, com este nosso sereno caminhar pelos trilhos dos *Elementos*, para sinalizar que durante muitos séculos, muitos tradutores e editores referiram-se a Euclides de Alexandria como Euclides de Megara.

Este engano nasceu da confusão entre Euclides de Alexandria e Euclides de Megara, filósofo socrático, que viveu por volta de 400 a.C. A primeira referência explícita a Euclides como Euclides de Megara ocorre no século XIV quando o filósofo e escritor Bizantino Theodorus Metochita (1270 – 1332) chamou “Euclides de Megara, o filósofo socrático, contemporâneo de Platão”, ao autor do tratado de Geometria, entre outras obras, como, e.g., um tratado sobre Óptica. O equívoco permanece ainda por altura da impressão dos *Elementos* de Euclides feita em 1482, em Veneza, pelo tipógrafo alemão Erhard Ratdolt. O equívoco entre Euclides de Alexandria e o filósofo Euclides de Megara prossegue com a edição de Bartolomeo Zamberti em Paris, em 1516, de Tartaglia em Veneza, em 1565, de Candalla em Paris, em 1566, e de Sir Henry Billingsley em Londres, em 1570.

Na primeira figura da página seguinte, que nos mostra o frontispício da primeira edição, em inglês, de Henry Billingsley, de 1570, surge a referência, errada, a Euclides de Megara. Essa edição, que foi levada a efeito a partir do grego, tem introdução e um extenso comentário da autoria de John Dee, matemático inglês que chegou a ser conselheiro científico da rainha Isabel I.

No entanto, o académico e gramático bizantino Constantinus Lascaris (1434 – 1493) já tinha procedido à distinção, dizendo que “ele era diferente de Euclides de Megara, sobre quem Diógenes Laércio escreveu, e que escreveu diálogos”.

A propósito do equívoco referido acima, podemos convocar mais um nome grande, W. Shakespeare, de molde a tornar mais jubilosa esta nossa jornada, já onusta de muitos sortilégios, recordando uma sua bela fala: “De que vale um nome, se o que chamamos rosa, sob outra designação teria igual perfume?”

Continuando a tentar cumprir a nossa tenção, diremos que a primeira tradução dos *Elementos*

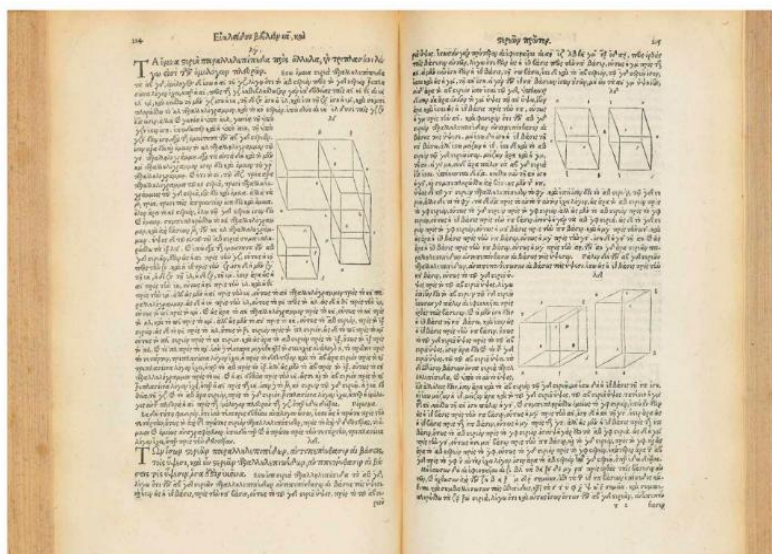
de Euclides directamente do grego antigo para latim foi efectuada pelo humanista e tradutor Bartolomeu Zamberti (c. 1473 – c. 1543), tendo sido publicada em Veneza, em 1505. Posteriormente, o teólogo e filólogo alemão Simon Grynaeus (1493 – 1541), professor de Grego na Universidade de Basileia, recorreu à primeira tradução latina feita por Bartolomeu Zamberti e a dois manuscritos gregos facultados por Lazarus Bayfius e por Joannes Rellius, para levar a efeito a primeira edição completa, em grego, dos *Elementos* de Euclides, edição essa já acima mencionada.

Nesta edição, Simon Grynaeus incorporou os quatro livros de comentários de Proclus ao primeiro livro dos *Elementos* de Euclides, disponibilizados pelo humanista inglês John Claymond (1468 – 1537). A *editio princeps* (primeira edição impressa) dessa edição foi levada a cabo pelo editor e impressor renascentista Johannes Herwagen (1497 – 1558), de Basileia, em 1533.

Essa edição, que se tornou, até ao Séc. XVIII, no manual mais utilizado para o ensino da Matemática, permanece, na história do design gráfico, com a primeira edição a imprimir diagramas geométricos juntamente com o texto.

A figura ao lado mostra-nos duas páginas da edição de Johannes Herwagen.

No entanto, a mais importante tradução dos *Elementos* do grego antigo para o latim é do matemático italiano Federico Commandino, em 1572, a quem pertence, também, o crédito de ter sido o primeiro tradutor a resolver, para além de qualquer dúvida, o equívoco gerado em torno do nome de Euclides:



“Libertemos, então, algumas pessoas do erro. Pelo qual forma induzidas a acreditar que o nosso Euclides é o mesmo filósofo de Megara”.

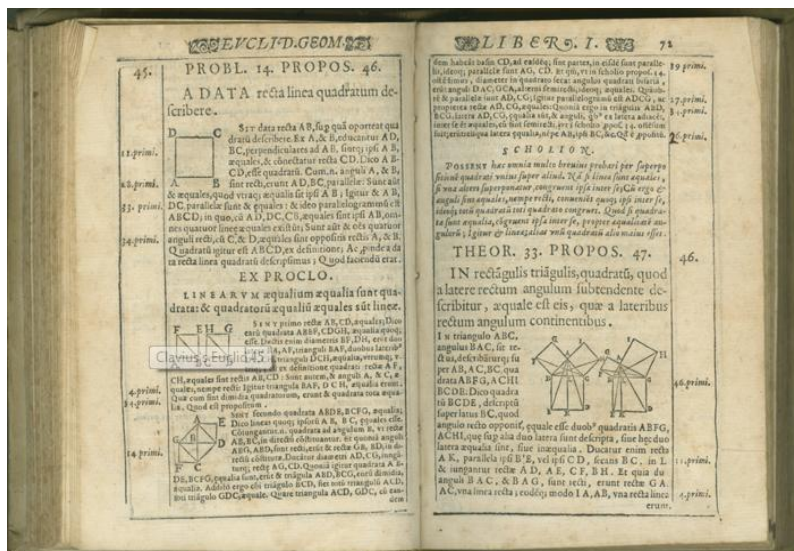
Federico Commandino produziu, também, uma tradução dos *Elementos* de Euclides para italiano.

A tradução de Federico Commandino, levada a efeito após um exigente trabalho de pesquisa suportado em fontes fidedignas, veio, de certo modo, encerrar o diferendo existente entre as versões de Campanus e de Zamberti. Naquela relevante e influente tradução, Commandino acrescentou não só anotações antigas como comentários autógrafos. Em 1574, o jesuíta Christopher Clavius, matemático e astrónomo, publica em Roma uma versão dos *Elementos* de Euclides que, devido ao rigor dos comentários e anotações, foi um dos compêndios mais utilizados ao longo do Séc. XVII, tendo sido objecto de inúmeras reimpressões.

Podemos ainda adiantar, prazerosamente, que Christopher Clavius, que fez algum do seu aprendizado na Universidade de Coimbra, integrou uma comissão nomeada pelo Papa Gregório XIII, em 1579, para levar a efeito uma reforma do calendário, que estabeleceria, com base nos trabalhos do italiano Aloysius Lilius, o denominado Calendário Gregoriano.

Na figura seguinte, podemos ver duas páginas da edição de Christopher Clavius, onde surge a Proposição 47 (Teorema de Pitágoras) do Livro I.

Em 1703, o matemático escocês David Gregory publicou a primeira edição das obras completas de Euclides, em grego e em latim, onde a edição respeitante aos *Elementos* foi suportada nos trabalhos de Simon Grynaeus e de Federico Commandino, consultando, também, as treze palestras, sobre os *Elementos* de Euclides, dadas por Sir Henry Savile (1549 – 1622) em 1620 e publicadas em 1621.



Adiantaremos, ainda, que a partir do Séc. XVI, começaram a surgir traduções dos *Elementos* de Euclides vertidas para as línguas modernas. Poderemos, com enorme júbilo, referir que a tradução dos *Elementos* de Euclides para italiano levada a efeito pelo insigne matemático Niccolò Tartaglia, em 1543, tornou-se, com efeito, na primeira tradução a intentar tal movimento.

Nesta nossa aventura em torno da Geometria, ou melhor dizendo, de uma ideia de Geometria, aliás profícua e poderosa, permitamo-nos, de modo apazível e assaz pertinente, convidar a irriante figura do argentino Jorge Luís Borges, para recuperar uma sua bela fala, em que ele, nos seus múltiplos simulacros, evoca o nome de um urbanista inglês, para dizer que: “Unwin lembrou-se de Nicolau de Cusa, para quem toda a linha recta é o arco de um círculo infinito”.

Na parte final deste sereno caminhar, podemos, de modo exultante, convocar mais um companheiro de jornada, Ofer Elior, da Universidade de Genebra, para fazer das suas tão

impressivas palavras uma espécie de epítome de tudo o que até agora ficou escrito: “Os *Elementos* de Euclides é um dos textos canónicos que moldaram a nossa herança cultural.”

Nessa longa itinerância iniciada por volta do Séc. III a.C., na Grécia Antiga, em que partimos em demanda de alguns dos muitos caminhos percorridos pelos *Elementos* de Euclides, adentrámos pelo califado Abássida, deambulámos pela Idade Média, na Europa, alcançámos e transpusemos o Renascimento até chegarmos à Modernidade. Agora, então, que nos estamos a abeirar do fim desta nossa jornada de muitos sortilégios, poderemos consagrar alguma da nossa mais fina atenção à estrutura da obra que em boa hora nos convocou para esta aventura, não sem antes nos apropriarmos das belas palavras de mais um nome grande que ajudará a tornar mais fúlgido esse nosso vaguear, a poetisa americana Edna St. Vincent Millay (1892 – 1950), que, de modo elegante, escreveu: “*Euclid alone has looked on Beauty bare*”. Os *Elementos* é um tratado de Matemática composto de treze livros que encerram um conjunto de definições, postulados e proposições, tendo Euclides burilado algumas das proposições já conhecidas e providenciado demonstrações rigorosas de outras tantas que haviam sido provadas de modo menos preciso.

A matéria de que se constitui os *Elementos* é-nos apresentada de modo austero, como já acima déramos nota, uma vez que não contém nenhuma introdução nem qualquer preâmbulo, não sendo, de igual modo, facultado nenhum exemplo nem qualquer cálculo.

Daremos nota de que em algumas versões dos *Elementos* de Euclides, aparecem os Livros XIV e XV, que são livros apócrifos. O Livro XIV parece ter sido escrito por Hypsicles (c. 190 – c. 120 a.C.), com base num tratado de Apolónio sobre cónicas, e o Livro XV talvez tenha sido escrito, pelo menos em parte, por Isidoro de Mileto (442 – 537).

Sinalizaremos de modo breve, mas jubiloso, que Isidoro de Mileto foi um dos dois arquitectos incumbidos, pelo imperador Justiniano I, o Grande, da construção da majestosa catedral de Santa Sofia em Constantinopla.

Continuando a dedicar a nossa diligente atenção à contextura dos *Elementos*, enfatizaremos que as definições, os axiomas ou postulados (que estabelecem a existência de entes fundamentais como o ponto, a recta e o plano) e as proposições (teoremas) não são apresentados de modo aleatório, mas sim sistematizados de um modo ordenado. Cada proposição resulta de definições, de axiomas e de proposições anteriormente demonstradas, através de um conjunto de regras lógicas claras e precisas.

O que distingue a obra de Euclides de todas as outras que chegaram até nós e que faz a sua grandeza e excepcionalidade é a sua estrutura axiomática.

Foi do método dedutivo que Euclides se muniu para construir a obra que durante vários séculos constituiu-se como o modelo de raciocínio lógico e científico, não só para a Matemática como também para outras disciplinas científicas.

Os *Elementos* estão divididos em treze livros, cujas matérias estão assim distribuídas:

Livros I a IV — tratam de geometria plana elementar. Partindo das propriedades elementares de ponto, recta e ângulo, levam-nos ao Teorema de Pitágoras (Livro I — proposição 47), à construção de “um segmento de recta dividido em média e extrema razão”, i.e., à secção áurea (Livro 2 — Proposição 11), ao círculo e aos polígonos regulares.

Como a maioria dos treze livros, o livro I começa com uma lista de **Definições** (23, ao todo) sem qualquer comentário como, por exemplo:

- ◊ "um ponto é o que não tem parte"
- ◊ "uma recta é um comprimento sem largura"
- ◊ "uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura"

Após às Definições, surgem, no Livro I, os Postulados ou Axiomas, as Noções Comuns — e.g.: “As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si” — e só depois as proposições. Os **Postulados** são proposições geométricas específicas.

Segundo a etimologia de “Postulado”, Euclides “pede” que se aceite como verdadeiras as cinco proposições geométricas que são enunciadas nos seguintes postulados:

1. Dados dois pontos, há um segmento de recta que os une;
2. Um segmento de recta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma recta;
3. Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer pode-se construir um círculo de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;
4. Todos os ângulos rectos são iguais;
5. Se uma linha recta cortar duas outras rectas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor que dois rectos, então essas duas rectas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos. (É este o célebre 5º Postulado de Euclides)

Assim, três conceitos fundamentais — ponto, recta e círculo — e cinco postulados, alusivos a esses conceitos, são o suporte de toda a geometria euclidiana.

Livro V — aborda a Teoria das Proporções de Eudoxo (408 – 355 AC) em termos puramente geométricos.

Livro VI — dedica-se aos problemas de semelhança de figuras planas. Retorna à secção áurea (proposição 30) e ao Teorema de Pitágoras (proposição 31) como teoremas referentes a razões entre grandezas. Na proposição 27 surge a demonstração de que o quadrado é, de todos os rectângulos de um dado perímetro, o que tem a área máxima.

Livros VII a IX — versam a Teoria dos Números. Encontramos, e.g., a definição de número primo (Def. VII.11), o “Algoritmo de Euclides”, para obter o máximo divisor comum entre dois números (Prop. VII.2), o «Teorema de Euclides», que assegura que existe uma infinidade de números primos (Prop. IX.20) e o modo de como obter um número perfeito (Prop. IX.36).

Livro X — é o mais extenso e, considerado por muitos estudiosos, o mais difícil de todos os Livros. Ocupa-se das magnitudes incomensuráveis, i.e., dos números irracionais. Para a perquirição das magnitudes incomensuráveis, surge, neste Livro, o “Princípio da exaustão” (Prop. X.1).

Livros XI a XIII — cuidam da geometria sólida. Conduzem-nos à obtenção dos volumes dos poliedros e dos sólidos não poliedros e à discussão dos cinco poliedros regulares (platónicos), juntamente com a prova de que só existem esses cinco poliedros regulares.

Para se ter uma noção das dificuldades encontradas na tradução e transmissão dos *Elementos* de Euclides, apresenta-se no quadro à direita, a título de exemplo, três das principais traduções, com os acréscimos ou elisões de proposições (teoremas) em cada um dos Livros de Euclides (inclusive nos Livros XIV e XV que, como sabemos, são apócrifos).

Embora os *Elementos* de Euclides se tenham tornado, durante mais de 2000 anos, uma obra de referência para o estudo da Matemática, o seu “Postulado das Paralelas”, o quinto postulado, levantou sempre uma enorme controvérsia entre os matemáticos. Pela forma como foi redigido, o quinto postulado é, claramente, diferente dos anteriores. Ele não pode ser validado

Livro	Al-Tusi	Campanus	Heiberg
I	48	48	48
II	14	14	14
II	36	36	37
IV	16	16	16
V	25	34	25
VI	32	32	33
VII	39	39	39
VIII	25	25	27
IX	36	39	36
X	107	107	115
XI	41	41	39
XII	15	15	18
XIII	18	18	18
XIV	10	18	
XV	6	13	

empiricamente e é o único condicional. Os matemáticos pensavam que ele fosse uma consequência dos postulados precedentes, isto é, um teorema.

O já acima citado Proclus, afirma que: "Este (quinto postulado) deve até mesmo ser eliminado completamente dos Postulados, pois é uma proposição que envolve muitas dificuldades que Ptolomeu, em certo livro, se propôs resolver (...), mas a afirmação de que duas linhas rectas, por convergirem mais e mais à medida que forem sendo produzidas, acabam por se encontrar, é plausível, mas não necessária. (...) Fica claro, então, que devemos procurar uma prova do presente teorema, e que este é estranho ao carácter especial dos postulados."

Ao longo dos séculos, foram várias as tentativas de provar aquele postulado a partir dos restantes, ou então de substituí-lo por outro mais simples.

No Séc. XVIII, o matemático escocês John Playfair (1748 – 1819) estabeleceu um axioma equivalente ao quinto postulado dos *Elementos* de Euclides, mas mais intuitivo, e que reza assim:

“Dada uma recta e um ponto exterior a ela, existe uma e uma só recta contendo esse ponto e paralela à recta dada”.

Foi, no entanto, necessário esperar até ao século XIX, para que o húngaro János Bolyai (1802 – 1860), o russo Nicolai I. Lobachevski (1792 – 1856) e o alemão Carl F. Gauss (1777 – 1855) mostrassem que o Postulado das Paralelas não podia ser provado ou refutado com base nos quatro postulados anteriores, i.e., o quinto postulado era independente dos restantes.

Tornava-se então possível desenvolver uma nova geometria a partir de um sistema axiomático que contivesse uma alternativa ao Postulado das Paralelas.

Assim em 1826, Lobachevski formulou que:

“Por um ponto exterior a uma recta, podemos traçar uma infinidade de paralelas a essa recta”.

Mais tarde, em 1853, o alemão Bernhard Riemann (1826 – 1866), concluiu que:

“Por um ponto exterior a uma recta não podemos traçar nenhuma paralela a essa recta”.

Desde então, encontramos-nos perante três sistemas geométricos diferentes:

- A geometria euclidiana;
- A geometria de Lobachevski, também chamada hiperbólica;
- A geometria do Riemann, também chamada elíptica ou esférica.

As duas últimas são, actualmente, conhecidas como geometrias não euclidianas.

Estas novas geometrias abriram campo, no século XX, a novos avanços das ciências exactas, entre os quais a elaboração da Teoria da Relatividade de Einstein (1879 – 1955).

Após todas as atribuições sofridas pela magnífica obra de Euclides ao longo desta nossa resumida, mas prodigiosa aventura, podemos, prazerosamente, afirmar, como o fizeram os matemáticos polacos Karol Borsuk (1905 – 1982) e Wanda Szmielew (1918 – 1976):

"Se o valor de um trabalho científico pode ser medido pelo tempo durante o qual ele mantém a sua importância, então os *Elementos* de Euclides são a obra científica mais válida de todos os tempos."

Sabemos que perante uma obra com a grandeza e com o lastro histórico dos *Elementos* de Euclides, nunca tudo fica dito. Pensamos que, ainda assim, já estamos em condições de pedir emprestado ao preclaro Luís Vaz de Camões alguns versos da Estância quatro do Canto Terceiro da sua obra maior, os *Lusíadas*, para podermos, assim, encerrar de modo jubilatório esta fantástica aventura:

E, para dizer tudo, temo e creio
Que qualquer longo tempo curto seja;
Mas, pois o mandas, tudo se te deve;
Irei contra o que devo, e serei breve.

Prontuário

<https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/euclid-transmission-elements>

<https://www.laphamsquarterly.org/roundtable/evidence-elements>

https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid%27s_Elements

<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5063916/>

<https://www.britannica.com/biography/Euclid-Greek-mathematician/Renditions-of-the-Elements#ref895613>

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html>

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid/>

<https://greciantiga.org/arquivo.asp?num=0503>

<https://nationalgeographic.pt/historia/grandes-reportagens/1191-ed-especial-euclides-mar2017>

https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedes_Palimpsest

<https://www.britannica.com/biography/Pappus-of-Alexandria>

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Nayrizi/>

<https://www.britannica.com/topic/Elements-of-Theology>

https://second.wiki/wiki/bartolomeo_zamberti

<https://historyofinformation.com/detail.php?entryid=2749>

<https://digital.bodleian.ox.ac.uk/>

<https://seeingeuclid.org/displays/university-of-oxford/>

<https://www2.hf.uio.no/polyglotta/index.php?page=volume&vid=67>

<https://library.brown.edu/exhibits/archive/math/textfr.html>

<https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/commandino-federico>

<https://www.1001inventions.com/house-of-wisdom/>

<https://dl->

web.meocloud.pt/dlweb/KYjsni82LsiGj8f9oin6Xw/download/A%20minha%20escrita/Notas%20e%20Apontamentos/TC2MA324Spring2015RA2G1.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/House_of_Wisdom#Notable_people

<https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-early-translations-of-euclids-elements-into-arabic>

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Campanus/>

<https://www.jstor.org/stable/25597482>

<https://www.britannica.com/biography/al-Mansur-Abbasid-caliph>

<https://www.britannica.com/biography/Harun-al-Rashid>

<https://www.lemauricien.com/le-mauricien/history-harun-al-rashid-the-caliph-of-islams-golden-age/435504/>

<https://www.irem.univ-mrs.fr/expo2013/english/mediterranee-euclide-en.pdf>

https://en.wikipedia.org/wiki/Toledo_School_of_Translators

https://www.newworldencyclopedia.org/entry/Adelard_of_Bath

<https://www.britannica.com/biography/Gerard-of-Cremona>

<https://reader.elsevier.com/reader/sd/pii/S0315086084800063?token=6C4CDA9FFBE70E44E8C933FBAF0B8BFBEEC778CFD5A780A025F2A8F218D44407BB7B91D77B8A93157E48CF732C138B8&originRegion=eu-west-1&originCreation=20220607094837>

<https://ia801604.us.archive.org/35/items/Os.Elementos-Euclides/OsElementos-Euclides.pdf>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Johan_Ludvig_Heiberg_\(historian\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Johan_Ludvig_Heiberg_(historian))

https://en.wikipedia.org/wiki/Christopher_Clavius

https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/16/16131/tde-13102005-115856/publico/02_cap1.pdf

<https://library.ethz.ch/en/locations-and-media/platforms/virtual-exhibitions/fibonacci-un-ponte-sul-mediterraneo/reception-of-fibonacci-numbers-and-the-golden-ratio/euclid-construction-of-the-golden-ratio.html>

<https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/euclides/postuladoeuclides.htm>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Savile_\(Bible_translator\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Savile_(Bible_translator))

<https://matematica.hi7.co/tentativas-de-demonstracao-do-quinto-postulado-de-euclides-do-seculo-iii-a-c--ao-seculo-xxi--5631d119ed462.html>

https://sites.pitt.edu/~jdnorton/teaching/HPS_0410/chapters/non_Euclid_Euclid/index.html