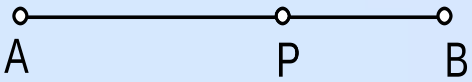
"Seja bem-vindo

quem vier por bem"

José Afonso

Número de ouro

- Dado um segmento *[AB],* onde localizar um ponto *P,*



de modo que: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$?

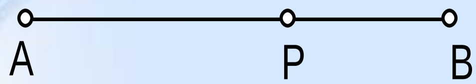
(Estamos em presença de uma proporção)

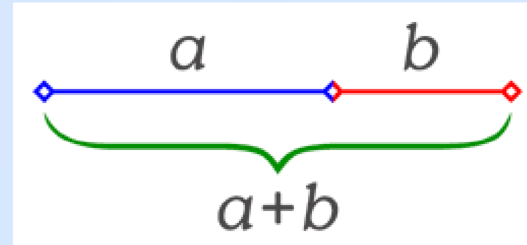
- A questão anterior surge, com outra formulação, na 30ª proposição do 6º livro dos *Elementos* de Euclides (VI.30):

"Como seccionar um segmento de recta em média e extrema razão?"

(Ver definição em *Elementos* VI.Def.3)

- Vejamos a capa da mais antiga tradução dos *Elementos* para latim, de Adelardo de Bath (c. 1080 – c. 1152).





- Consideremos $\overline{AP} = a$, $\overline{\mathrm{PB}} = b$ e $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \Phi$.

Temos, então: $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b} = \Phi$.

De $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \Phi$ obtém-se: $a = \Phi \cdot b$.

Então: $\dfrac{\Phi \cdot b + b}{\Phi \cdot b} = \dfrac{\Phi \cdot b}{b} \underset{(\div b)}{\Leftrightarrow} \dfrac{\Phi + 1}{\Phi} = \Phi \Leftrightarrow \Phi + 1 = \Phi^2 \Leftrightarrow$

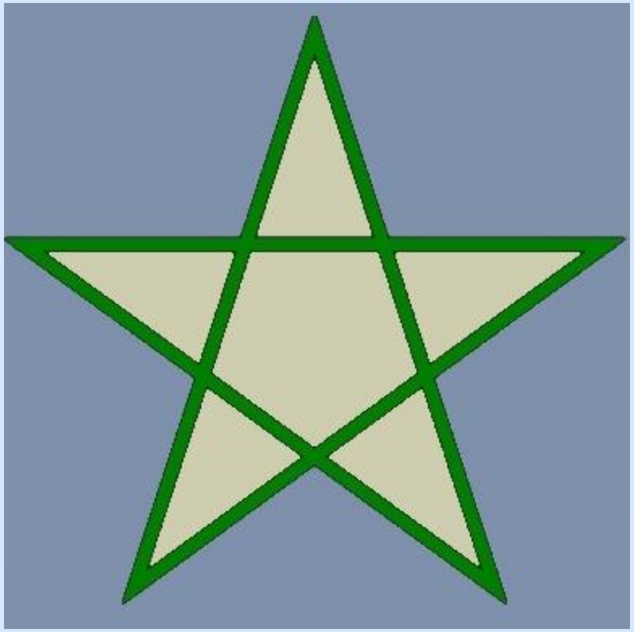
$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Leftrightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ (sol.\ positiva)$$

- Refira-se que, antes de Euclides, Eudoxo de Cnido (408 – 355 a.C.) tinha já desenvolvido uma “teoria da proporção” que lhe serviu para, posteriormente, desenvolver o “Método da Exaustão” (a pré-história do cálculo integral).

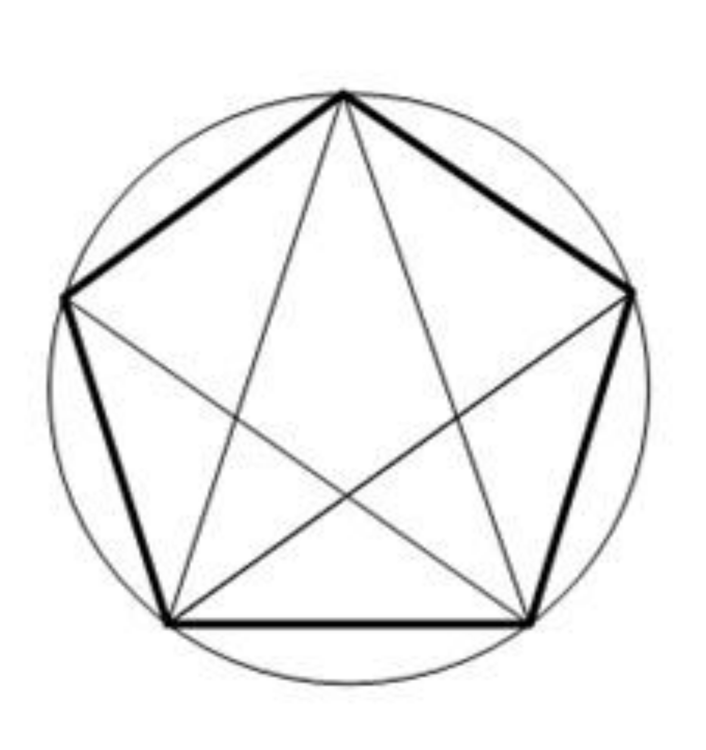
- A “teoria da proporção” de Eudoxo pode ser encontrada no livro quinto dos *Elementos* (V.Def.5) e (V.Def.6).

- Acrescenta-se, a título de curiosidade, que a demonstração da formulação feita por Demócrito – “o volume de uma pirâmide é um terço do volume do prisma de mesma base e altura” – é, segundo Arquimedes, da autoria de Eudoxo.

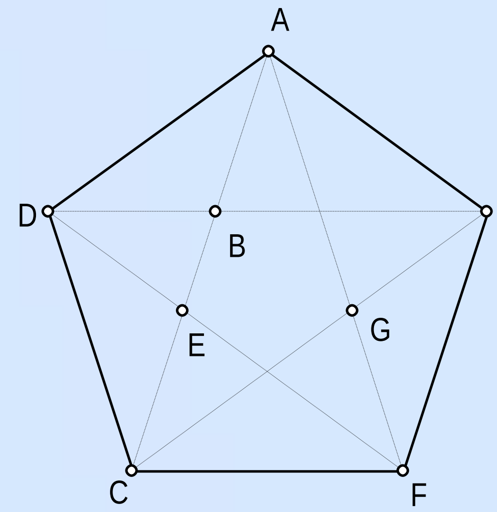
Recuperemos o símbolo da escola Pitagórica:



- A construção de um pentágono regular (que nos permite obter o pentagrama, visto anteriormente) aparece na 11ª proposição do 4º livro dos *Elementos* de Euclides (IV.11).



No pentágono regular da figura:



- tem-se que: $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{diagonal}{lado} = \Phi$,
- mas, também se verifica que:

$$\Phi = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BE}} = \ldots$$

- Se nos fixarmos no $\Delta[ACF]$,vemos que ele é isósceles $\left(\overline{AC} = \overline{AF}\right)$; sabe-se também que:

$$C\hat{A}F = 36^o \quad \text{e} \quad A\hat{C}F = A\hat{F}C = 72^o \, .$$

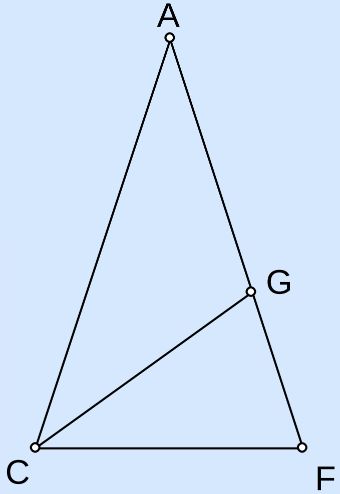
- Assim, em qualquer triângulo isósceles, em que cada ângulo da base é o dobro do ângulo remanescente, tem-se:

$$\frac{lado\,maior}{lado\,menor} = \Phi = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}}$$

(razão já vista anteriormente).

- Como $C\hat{A}F = 36^{\circ}$, há quem denomine o ângulo CAF como *ângulo dourado*.

Se bissectarmos um dos ângulos da base (e. g. o ângulo *ACF*), ficamos com um $\Delta[CFG]$ Semelhante* ao $\Delta[ACF]$

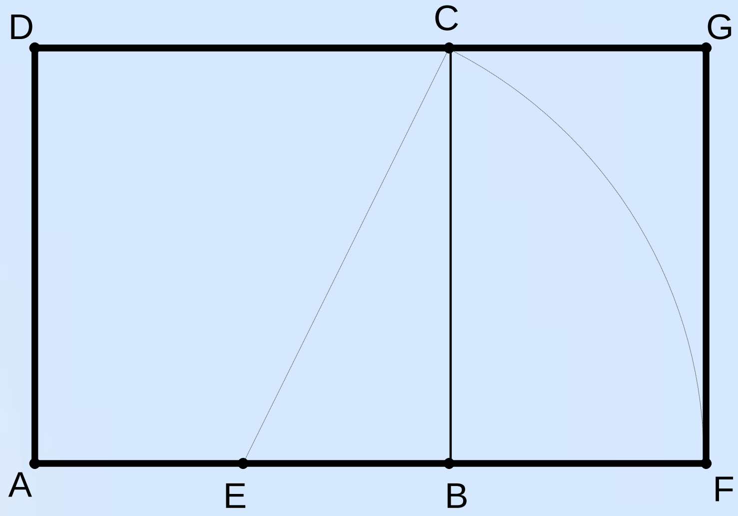


Assim: $\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FG}} = \Phi$.

*: os dois triângulos são semelhantes, pois têm dois ângulos internos iguais.

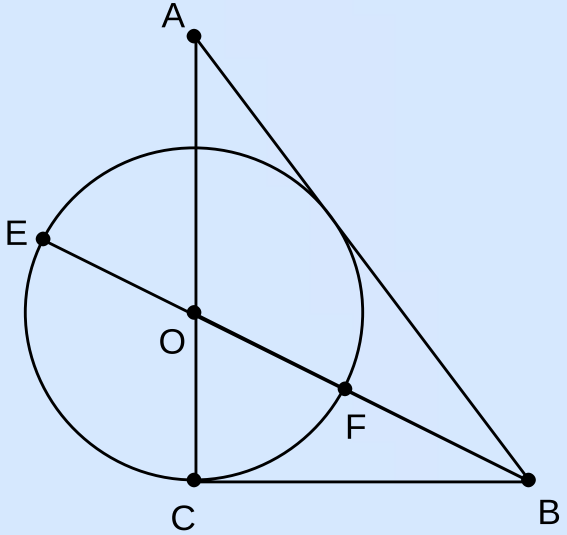
- Vejamos, agora, outros métodos de construir a, também chamada, secção dourada, ou rectângulo de ouro:
  (i) Construamos o quadrado *[ABCD]*. Marquemos *E*, ponto médio de *[AB]*. Tracemos, agora, o arco *CF*, com centro em *E* e raio $\overline{EC}$. Tracemos, de seguida, *[BF]*, *[FG]* e *[CG]*.

  O rectângulo *[AFGD]* é um rectângulo de ouro, tal que $\frac{\overline{AF}}{\overline{FG}} = \Phi$.



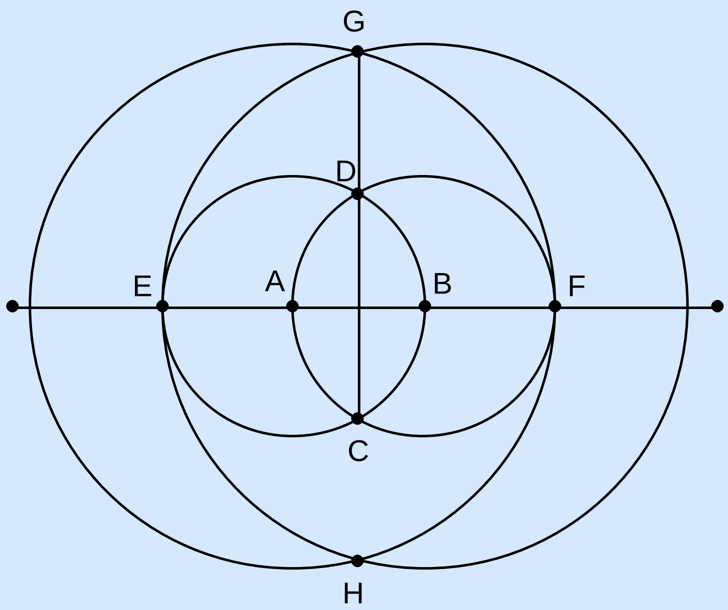
- (ii) Comecemos, desta feita, por desenhar um triângulo rectângulo *[ABC]*, tal que: $\overline{BC} = 3$ e $\overline{CA} = 4$. Tracemos, de seguida, a bissectriz do ângulo *CBA*. Seja *O,* o ponto de intersecção da bissectriz do ângulo *CBA* com o cateto *[CA]*. Tracemos, agora, a circunferência de centro em *O* e raio $\overline{OC}$. Designemos por *F* e por *E* os pontos de intersecção da bissectriz com a circunferência.

  Assim: $\dfrac{\overline{FE}}{\overline{FB}} = \Phi$.

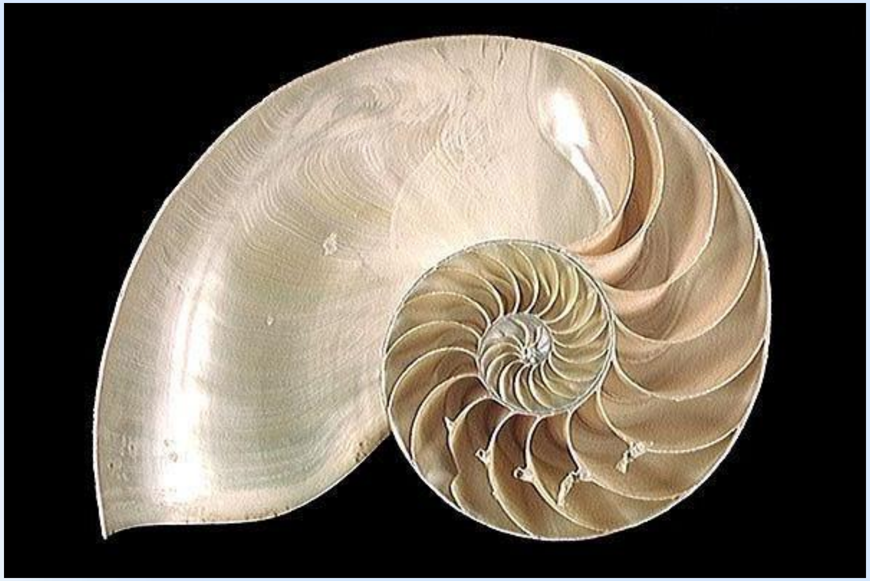


- Finalmente: (iii) Por simplificação de escrita, designemos por *C(P)* a circunferência de centro *C* e que passa no ponto *P*. Construamos, então, as circunferências *A(B)* e *B(A)*. Estas duas circunferências, *A(B)* e *B(A)*, intersectam-se em *C* e *D* e intersectam a recta *AB* em *E* e *F*, respectivamente. As circunferências *A(F)* e *B(E)* intersectam-se em *G* e *H*. Devido às simetrias, *H*, *C*, *D* e *G* são colineares.

Assim: $\dfrac{\overline{CG}}{\overline{CD}} = \Phi$.

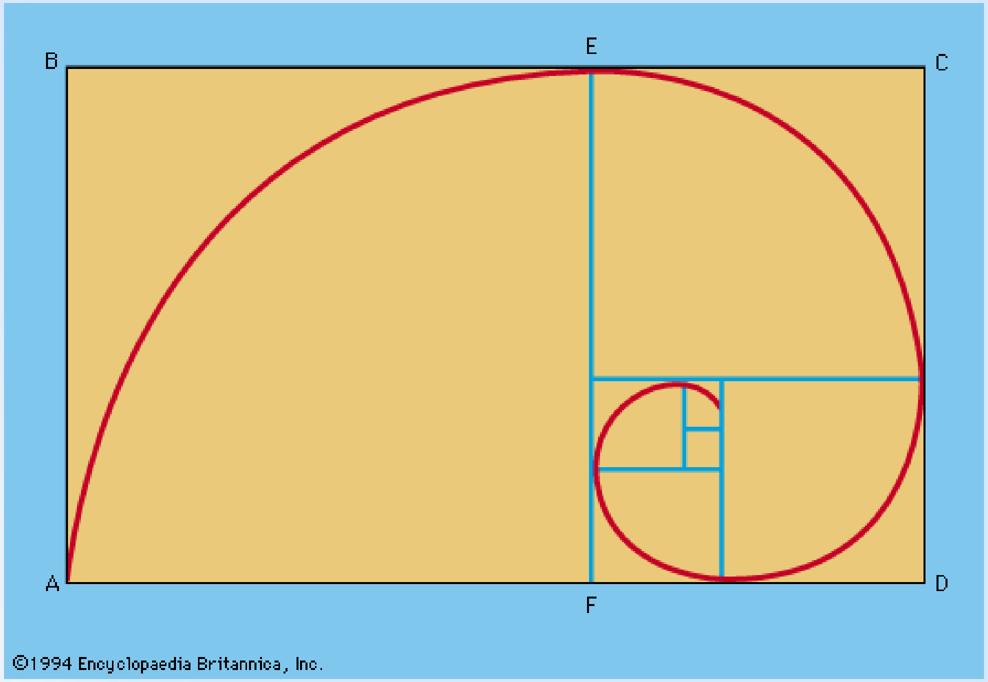


- Observemos, agora, a concha Náutilus:

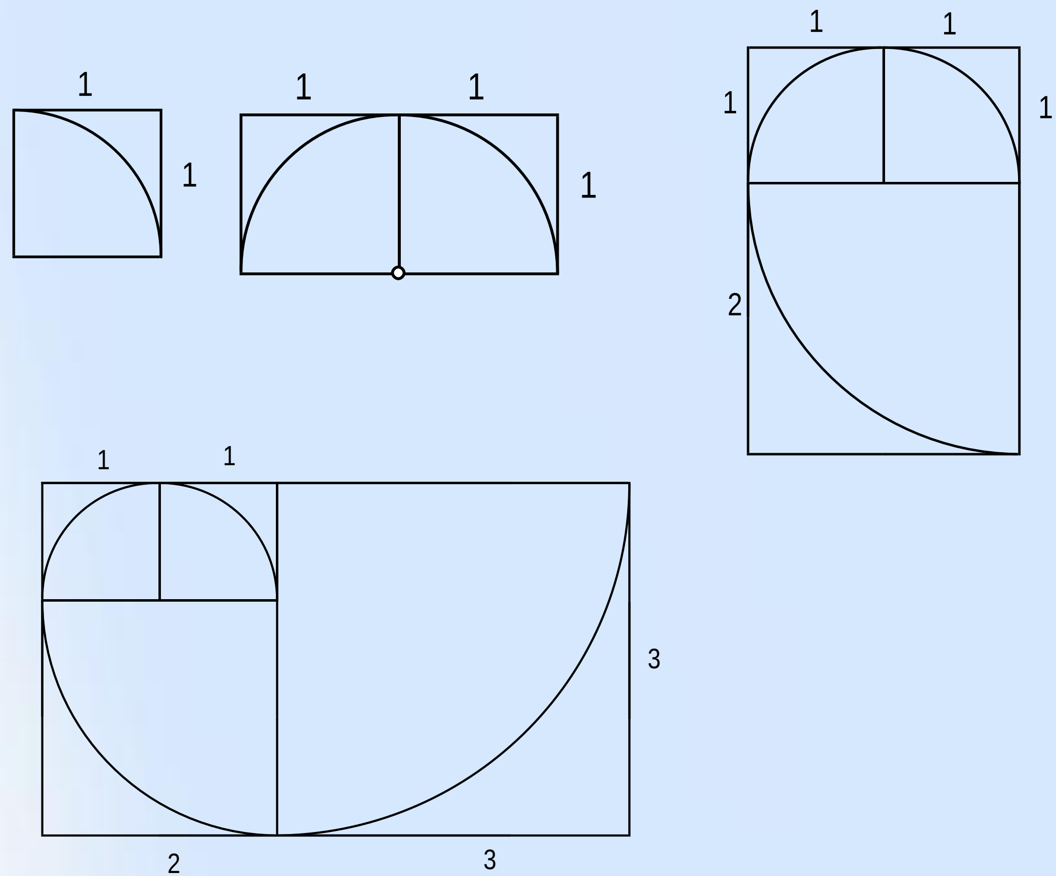


- e…

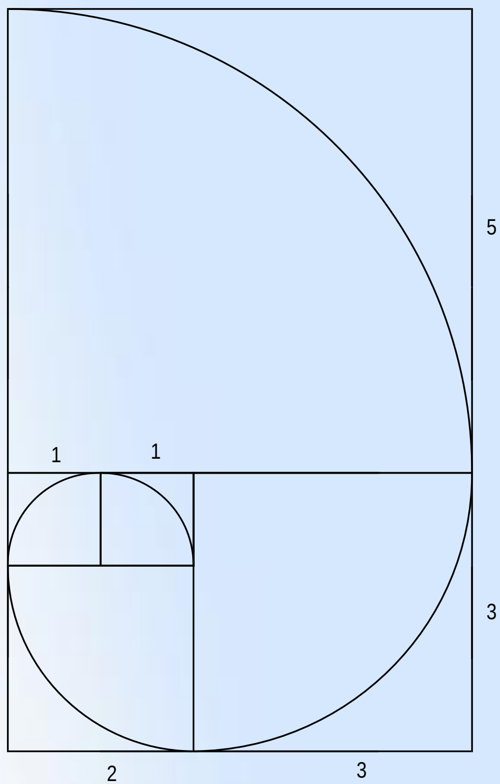
…associemos a secção dourada à sucessão de Fibonacci:



Façamos a sua contrução:



…



- A espiral é obtida, juntando-se sucessivamente quadrados de lados 1, 1, 2, 3, 5, … , traçando, em cada um deles, um quarto da circunferência de raio igual ao respectivo lado.

(*espiral áurea*)

- A espiral áurea é um caso particular da espiral logarítmica.

- A espiral logarítmica foi, primeiro, descrita por Descartes (1596 – 1650) e estudada posteriormente, de forma mais aprofundada, por Jacob Bernoulli (1654 – 1705), que a designou por *spira mirabilis* (do latim *espiral maravilhosa*).

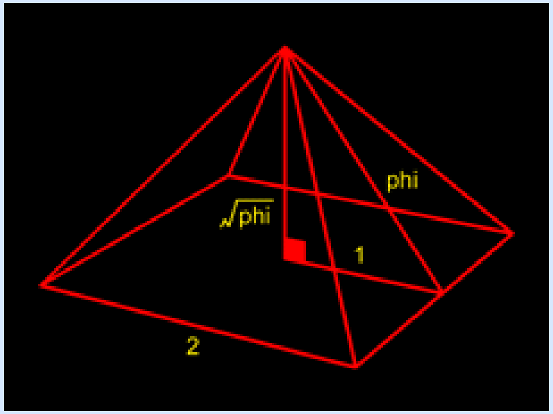
- Johannes Kepler (1571 – 1630) referiu que:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\ldots,\frac{f(n+1)}{f(n)}\rightarrow \Phi$$

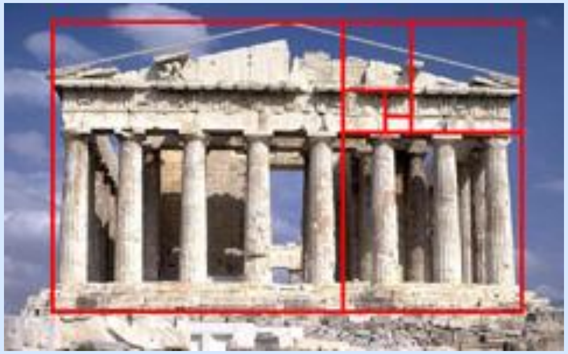
<u>obs</u>: *f(n),* número de Fibonacci

*A*lguns exemplos do número de ouro na arquitectura (i):

- Heródoto relata que sacerdotes egípcios lhe disseram que houvera a intenção de incorporar o número de ouro na construção da grande pirâmide de Keops (c. 2600 a.C.).

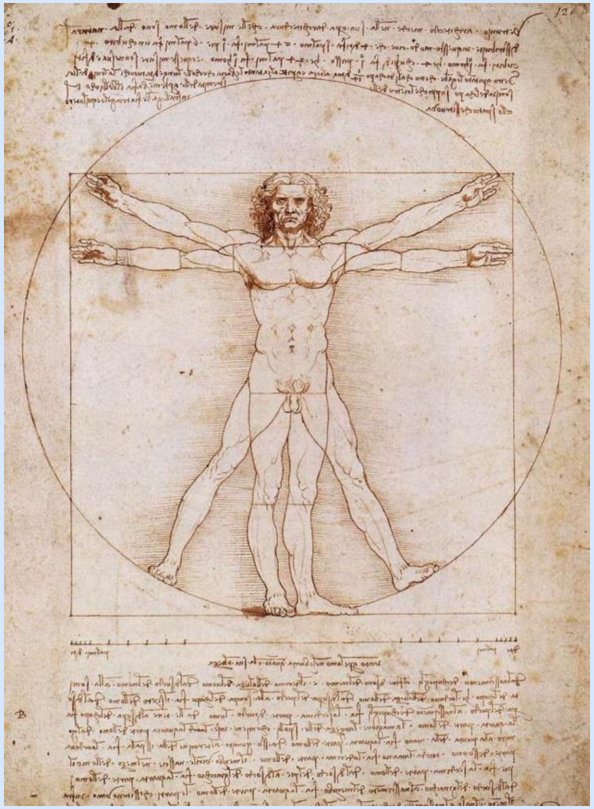


- Partenon, em Atenas…



𝒩as artes plásticas (ii):

- Leonardo da Vinci (1452 – 1519)



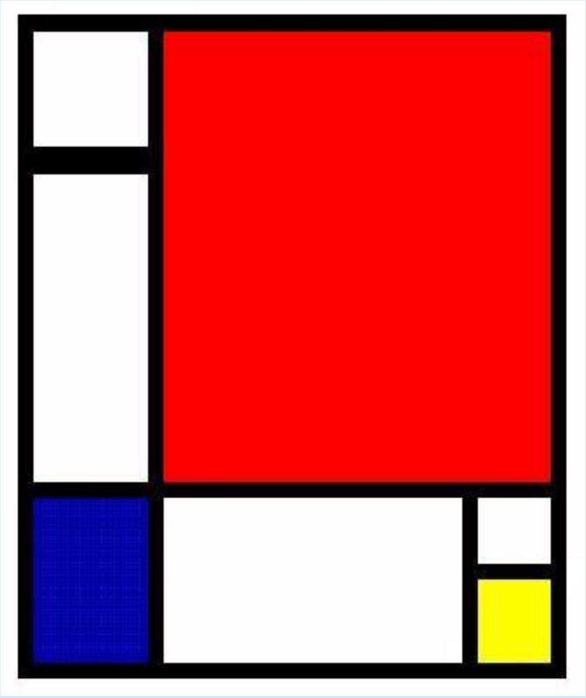
Estudo das proporções do ser humano segundo Vitruvius, Marcus Polio (Séc. I a.C.), arquitecto romano cuja obra *De Arquitectura* foi crucial para o estudo dessa disciplina até ao Renascimento europeu.

- Leonardo da Vinci

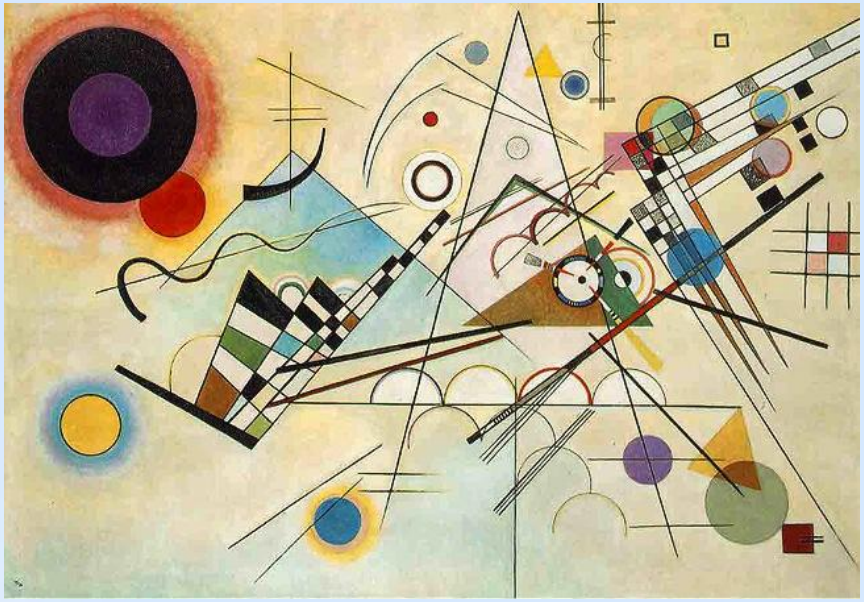
- Sandro Botticelli (1445 – 1510)

- Johannes Vermeer (1632 – 1675)

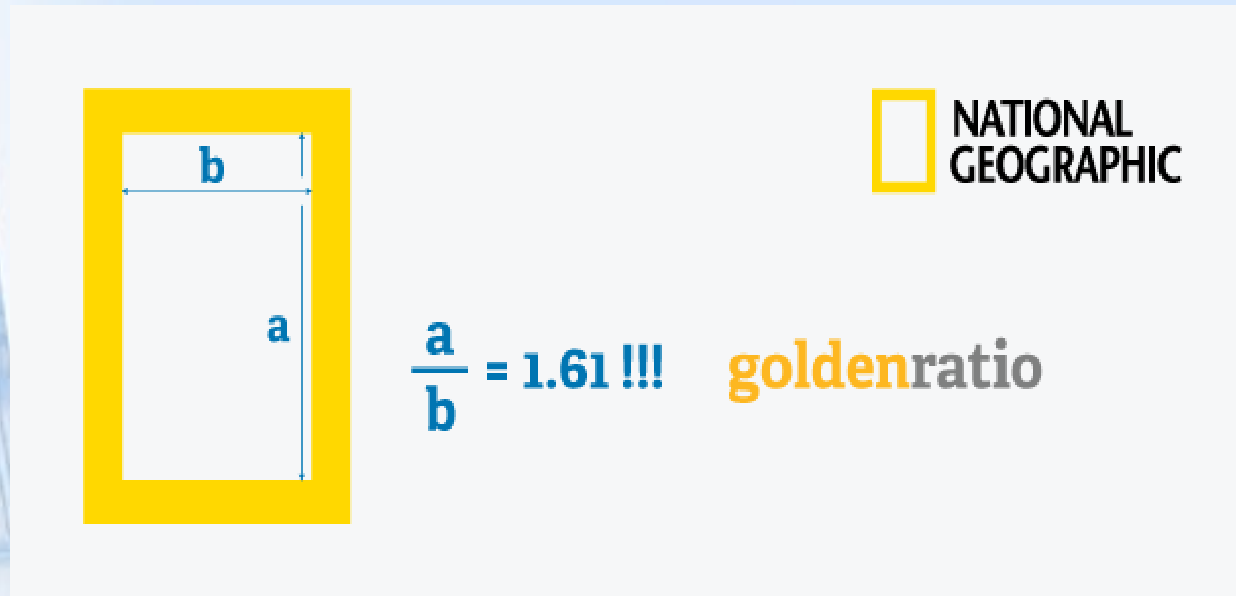
- Piet Mondrian (1872 – 1944)

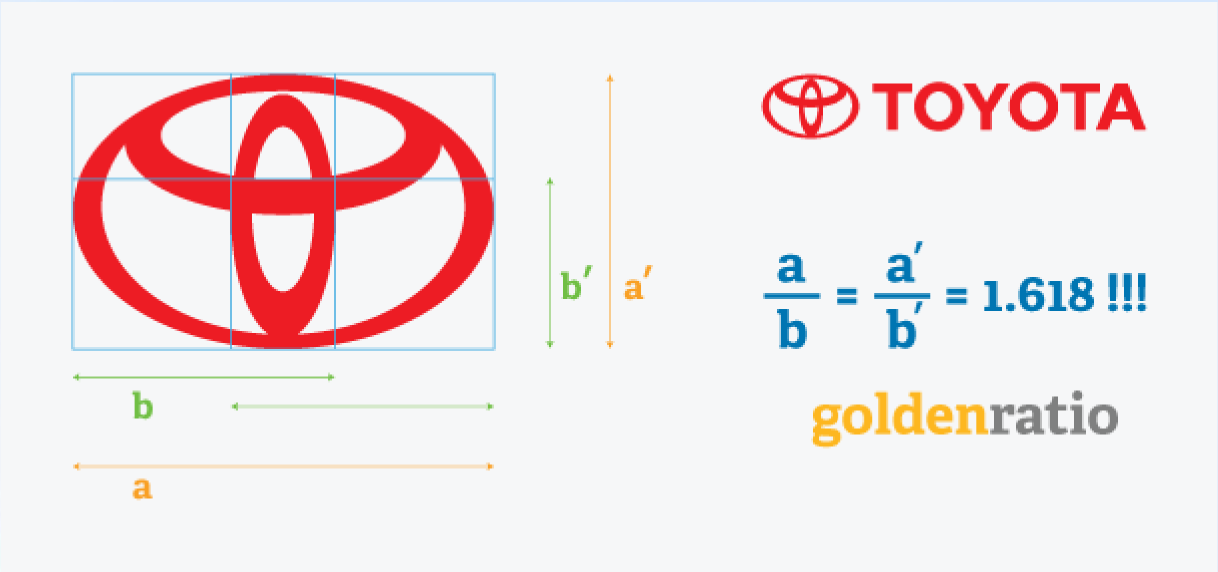


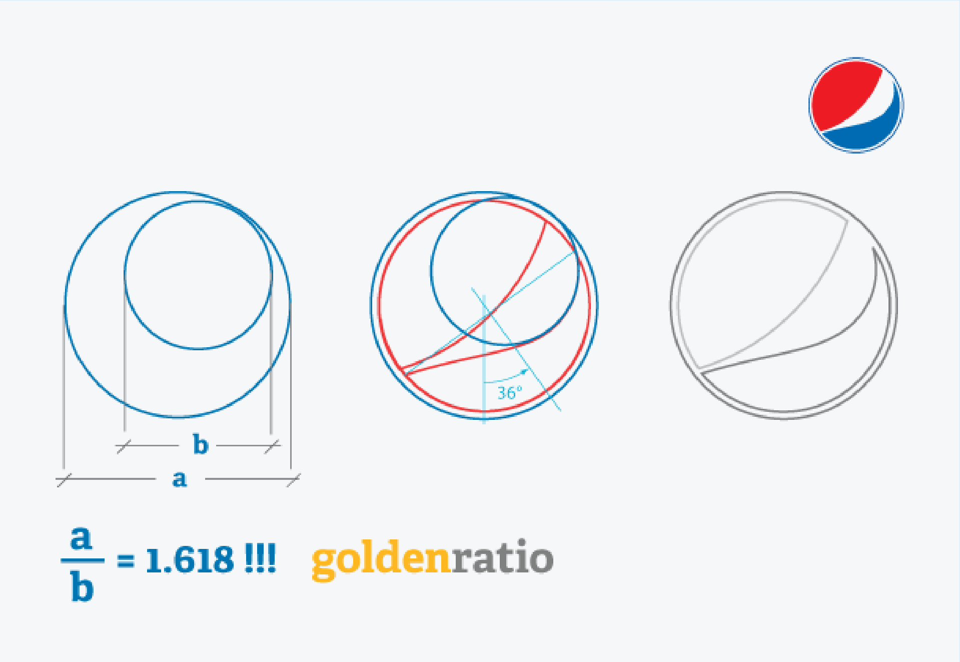
- Vasily Kandinsky (1866 – 1944)



E no *design* (iii):




b′
a′
b
a
TOYOTA
$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = 1.618$!!!
goldenratio



(pepsi cola)

- De referir que Luca Pacioli (c. 1445 – 1514), frade franciscano com quem Leonardo da Vinci estudou geometria, discorreu sobre o número de ouro na *Divina Proportione* (1509). Os seus trabalhos no âmbito da Matemática foram uma referência na Europa, durante todo o Séc. XVI.

- A letra "M", que surge como logótipo do Metropolitan Museum of Art, de Nova York, foi recuperada da *Divina Proportione*, de Luca Pacioli.

- O adjectivo “dourado” surge, pela primeira vez, em 1835.

- O número de ouro é, pela primeira vez, designado por Φ (fi), no início do Séc. XX (Mark Barr), em homenagem ao grande escultor ateniense Fídias (Séc. V a.C.), considerado o maior artista da Antiguidade. Adiantaremos que, por indicação de Péricles (estadista ateniense; Séc. V a.C.), Fídias supervisionou as obras para a construção do “Parténon” na acrópole de Atenas.

Abordemos algumas propriedades do número de ouro:

- Vimos mais atrás que: $\Phi^2 = \Phi + 1$;

Assim: $\Phi^2 \underset{(1)}{=} \Phi + 1 \underset{(\times\Phi)}{\Leftrightarrow}$

$$\Phi^3 \underset{(2)}{=} \Phi^2 + \Phi \ ;$$

$$\Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 \ ; \ \ldots$$

- Podemos, então, ter:

$$\Phi^0 \underset{(3)}{=} \boldsymbol{1} \quad ;$$

$$\Phi^1 \underset{(4)}{=} \boldsymbol{1} + \frac{1}{\Phi} \quad ;$$

$$\Phi^2 = \Phi + 1 = \left(1 + \frac{1}{\Phi}\right) + 1 \underset{(5)}{=} \boldsymbol{2} + \frac{1}{\Phi} \quad ;$$

$$\Phi^3 \underset{(6)}{=} \boldsymbol{3} + \frac{2}{\Phi} \quad ;$$

$$\Phi^4 = \boldsymbol{5} + \frac{3}{\Phi} \; ; \; \ldots$$

- De reparar que *1, 1, 2, 3, 5, …* são números de Fibonacci.

- Vejamos mais alguns modos de obter o número de ouro:

i) $2\cos(36^{o}) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \Phi$

ii) $$\Phi = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{f_n \cdot f_{n+1}}$$

(O símbolo f_n representa os números de Fibonacci) ou:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1\times 1} - \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} - \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 8} - \frac{1}{8\times 13} + \ldots$$

iii) $$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$

(fracções contínuas)

iv) $$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

- Para finalizar:

  1º) Escolhamos um número *n*;

  2º) $n+1$;

  3º) $\sqrt{n+1} = a_1$;

  4º) $a_1 + 1$;

  5º) $\sqrt{a_1 + 1} = a_2$;

  6º) $a_2 + 1$;

  7º) $\sqrt{a_2 + 1} = a_3$;

  $\ldots$

  $a_n = \Phi$.

- Podemos, assim, dizer que:

Φ é *"o mais irracional dos números irracionais"*

e que

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

Φ *é o único número cujo seu quadrado é igual a si próprio adicionado de uma unidade!*

- Terminaremos,
  citando György Doczi,
  in *O Poder dos Limites*:

"O poder da secção áurea em criar harmonia deriva da sua propriedade única de unir partes diferentes de um todo, de forma a que cada uma delas preserva sua identidade própria, mas molda-se a um padrão maior de um todo."