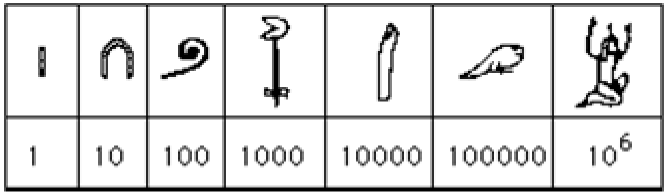
Fracções Egípcias

Um breve olhar

- A história do Antigo Egipto, uma das mais importantes civilizações da Antiguidade, desenvolveu-se nas margens do rio Nilo entre aproximadamente c. 3200 e 332 a.C.

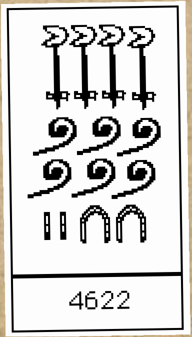
A notação matemática dos antigos egípcios era decimal.

- Podemos ver, na tabela seguinte, os numerais egípcios em escrita hieroglífica:



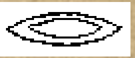
- Vejamos um pequeno exemplo:

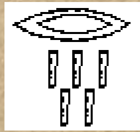
4622 na escrita hieroglífica
tinha a seguinte representação:



Os antigos egípcios faziam uso, nos seus cálculos, de números fraccionários; no entanto, só trabalhavam com *fracções unitárias.*

- Uma *fracção egípcia* é uma soma de fracções unitárias distintas

- Uma fracção unitária era representada colocando o símbolo  sobre o número considerado; por exemplo:

$\frac{1}{5}$ era escrito assim: 

- Dos escritos de Heródoto de Halicarnasso (484 – 425 a.C.) poderemos concluir que os antigos egípcios já conheciam a razão áurea.

- Os matemáticos egípcios, na resolução dos seus problemas, denotavam também o conhecimento do chamado teorema de Pitágoras (c. 582 – c. 497 a.C.).

A maior parte do conhecimento que temos hoje da Matemática egípcia baseia-se em dois documentos essenciais: o *Papiro de Rhind* (c.1650 a.C.) e o *Papiro de Moscovo* (c.1850 a.C.).

- O papiro de Ahmes, adquirido em 1858 por A. Henry Rhind, é um documento deteriorado, em que faltam alguns fragmentos (cerca de 18 cm da secção central são omissos).

- Este papiro, após morte de Rhind, seu proprietário, foi adquirido pelo Museu Britânico, onde se encontra até hoje.

- Alguns fragmentos do papiro de Ahmes encontram-se no Museu de Brooklyn em Nova York.

- O papiro de Moscovo, adquirido em 1893, encontra-se actualmente no Museu Pushkin de Belas Artes, em Moscovo.

A lépida abordagem que iremos fazer às fracções egípcias será com base no Papiro de Ahmes.

O papiro de Rhind, ou de Ahmes, é um longo rolo, medindo aproximadamente 5,5 m de comprimento e 0,33 m de largura. Está escrito, de ambos os lados, em hierático e é apresentado como o:

"Método correto de cálculo, para entender o significado das coisas e saber tudo o que é, obscuridades e todos os segredos"

- O papiro de Rhind consiste de:

  i) uma famosa tabela de números do tipo:

$$2/n \text{ , onde } n = 3, 5, 7, .., 101\,;$$

A omissão de fracções com denominadores “pares” sugere que eles perceberam, de forma nítida, que, e.g., $2/4$, $2/6$, etc., eram redutíveis a $1/2$, $1/3$, etc.

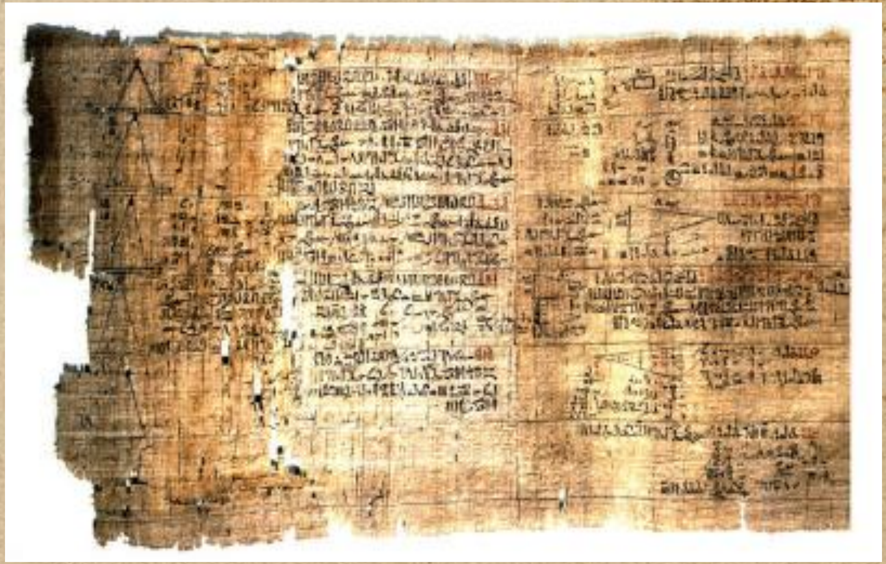
ii) uma pequena tabela com fracções decimais com os numeradores variando de *1* a *9*;

iii) cerca de 85 problemas variados, com as respectivas soluções.

- No papiro de Rhind não existem demonstrações nem são conhecidas as origens das fórmulas utilizadas.

- Nele aparecem alguns erros, importantes em alguns casos, que podem ficar a dever-se ao facto de o documento ter sido copiado de textos anteriores.

Vejamos, na figura ao lado, um fragmento do papiro de Rhind:



É de referir que o Museu Britânico possui também um *Rolo em Pergaminho* que contém 26 desenvolvimentos (26 fracções egípcias) para o número um. Esse rolo parece ter sido escrito com o intuito de ser um complemento ao papiro de Rhind para a resolução de vários problemas.

Façamos um breve parêntesis, para sublinhar que o entendimento que temos da história do Antigo Egipto é devido, fundamentalmente, à descoberta da *Pedra da Roseta,* em 1799, levada a cabo por Pierre-François Bouchard, militar francês que acompanhou Napoleão Bonaparte, na sua Campanha no Egipto.

A *Pedra da Roseta* é o fragmento de uma estela, bloco de granito preto, escrita em 196 a.C., durante o reinado de Ptolomeu V (210 – 180 a.C.)

A *Pedra da Roseta é* composta por três partes distintas, cada uma com o seu sistema de escrita (hieroglífico, demótico e grego antigo).

A sua tradução realizada, em 1822, por Jean-François Champolion, levando mais longe os esforços desenvolvidos por Thomas Young e por outros estudiosos, permitiu que se adentrasse no conhecimento da impressionante civilização egípcia.

A *Pedra da Roseta* também se encontra no Museu Britânico.

Recuperemos a definição de fracção egípcia:

Fracção egípcia é uma soma de fracções unitárias distintas

As razões que levaram os antigos egípcios a trabalhar só com fracções unitárias não são muito claras.

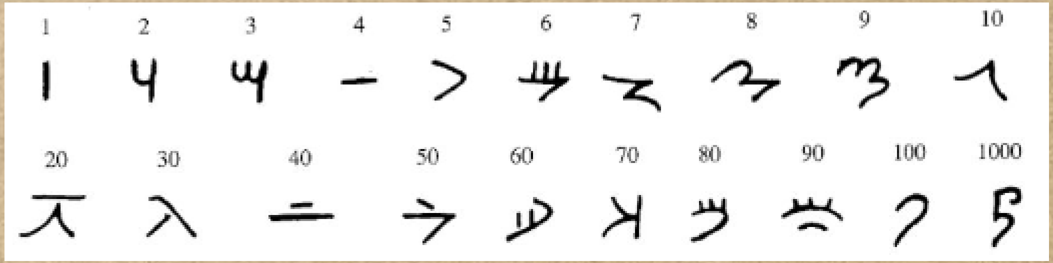
Os antigos egípcios começaram a desenvolver o estudo deste tipo de fracções durante o Antigo Império (c. 2686 – c. 2181 a.C.), também conhecido como o "Período das Pirâmides".

Breve nota:

- Pirâmides de Gizé: Quéops, Quéfren e Miquerinos.

O papiro de Ahmes data do Império Médio (c. 2050 – c. 1550 a.C.), período de inovações (na Matemática passou-se de uma escrita hieroglífica em que se trabalhava com aproximações até ao sexto termo de um dado desenvolvimento, para se trabalhar com uma escrita hierática — escrita cursiva — que, aparentemente, se traduziu numa evolução no cálculo das fracções, permitindo soluções exactas para muitos dos problemas).

- Vejamos, na tabela seguinte, os numerais egípcios, em escrita hierática:



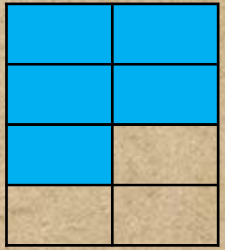
- Sabe-se muito pouco sobre as intenções que presidiram à escrita do papiro.

- Como atrás ficou sublinhado, não são conhecidas as origens das fórmulas utilizadas no Papiro de Rhind. O primeiro estudo sistemático conhecido para se tentar perceber a construção das fracções egípcias surge pela mão de Fibonacci (c.1170 – c.1250), no seu *Liber Abaci* de 1202.

- Foram deduzidos vários padrões para a obtenção das igualdades que a célebre e singular tabela, acima referenciada, encerra; no entanto, permanece a fascinante questão de se saber como foram obtidas aquelas identidades e qual o critério que presidiu às suas escolhas em detrimento de tantas outras.

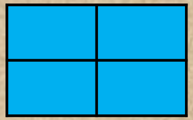
- É de toda a aceitabilidade sinalizar que as identidades das quais daremos mão podem não corresponder aos métodos usados pelos matemáticos.

- Comecemos a abordagem às fracções egípcias com um simples exemplo prático:
  - Como dividir 5 sacos de trigo por 8 pessoas?



    - Podemos começar por dar meio saco a cada pessoa:

$$\frac{1}{2} \times 8 = 4 \; :$$

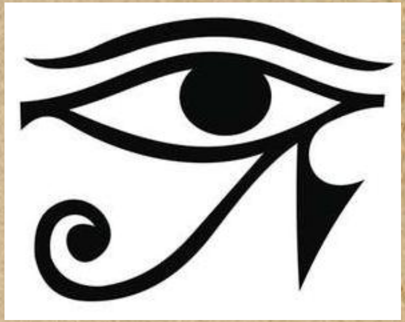


    - Resta 1 saco; se este for dividido em 8 partes, dará mais uma parte a cada um deles:

      - Assim: $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

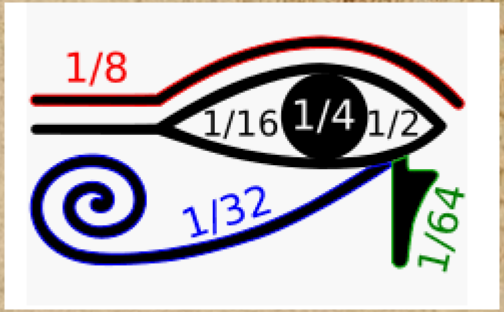
  - Como dividir 3 pães por 4 pessoas; Resp.: $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

Antes de tentarmos, de forma algo timorata, desvendarmos alguns dos "*segredos*" do Papiro de Rhind, derramemos o nosso olhar sobre o deus Hórus, filho de Osíris e de Ísis — mais propriamente, sobre o *Olho de Hórus.*



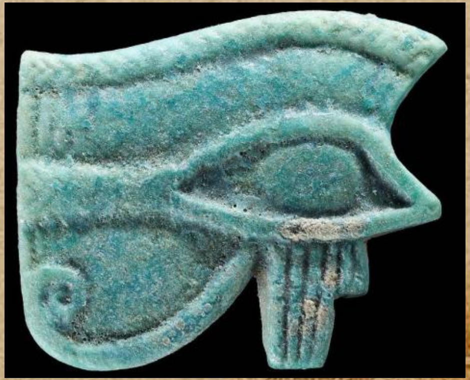
O olho de Horus era, para os Antigos Egípcios, um símbolo de poder e de protecção contra as forças do mal; era usado como amuleto, o qual conferia sorte, saúde e prosperidade.

⚘ No olho de Hórus, podemos observar a representação, de forma aproximada, do número *um* através de uma fracção egípcia com seis termos, em que os denominadores são potências de *2*.



- i.e: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \left(\frac{1}{64}\right)$

⚘ Vejamos, a seguir, uma representação, de 664 – 332 a.C., do olho de Hórus exposto no Museu de Belas Artes de Boston.



Vamos, então, entreabrir a porta que nos permitirá desvelar um pouco do mistério e do sortilégio que o papiro de Ahmes acolhe:

◈ Começaremos por nos acercar da famosa tabela que contém os intrigantes desenvolvimentos para os números do tipo:

$$\tfrac{2}{n} \quad \text{com} \quad n = 3, 5, 7, .., 101$$

◈ À excepção de $\tfrac{2}{3}$, e por vezes de $\tfrac{3}{4}$, os antigos egípcios escreviam todas as fracções como somas de fracções unitárias.

◇ Consideremos a seguinte condição: $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$, $\forall\, n \in N$

assim, podemos ter: $\frac{2}{n} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)}$

Com recurso a esta última identidade, os antigos egípcios calcularam os desenvolvimentos para os pequenos números primos, 3, 5, 7 e 11.

Então, para: i) $n = 3$ e ii) $n = 5$, teremos:

i) $\frac{2}{3} = \frac{2}{3+1} + \frac{2}{3(3+1)} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ e ii) $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

▪ Fazendo uso da mesma regra, obteremos para: $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{11}$ e $\frac{2}{23}$

as seguintes fracções egípcias:

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}, \qquad \frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66} \quad \text{e} \quad \frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$$

◈ Após o desenvolvimento das fracções em que os denominadores são os primos 3, 5, 7, 11 (o 23 parece constar desta lista por mero acaso), iremos de seguida abordar os desenvolvimentos para os seus respectivos múltiplos.

◇ A partir da igualdade obtida anteriormente: $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, os antigos egípcios trataram todas as fracções cujos denominadores fossem múltiplos de três como uma única família, com recurso à seguinte regra:

$$\frac{2}{3\cdot q}=\frac{1}{q}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{q}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$$

E, assim, teremos para as fracções:i) $\frac{2}{9}$, ii) $\frac{2}{21}$ e iii) $\frac{2}{75}$ os seguintes desenvolvimentos:

i) $\frac{2}{9}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$, ii) $\frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$ e iii) $\frac{2}{75}=\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$

◈ Do mesmo modo, a partir da igualdade atrás obtida: $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$,

eles obtiveram os desenvolvimentos para as fracções cujos denominadores fossem múltiplos de cinco com recurso à seguinte regra:

$$\frac{2}{5\cdot q}=\frac{1}{q}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{q}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)$$

Teremos, assim, para:

$\frac{2}{25}$ e $\frac{2}{65}$, os seguintes desenvolvimentos:

$$\frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75} \quad \text{e} \quad \frac{2}{65}=\frac{1}{39}+\frac{1}{195}$$

◈ Do igual modo, a partir da igualdade: $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$, foram obtidos os desenvolvimentos para as fracções cujos denominadores fossem múltiplos de sete com recurso à seguinte regra:

$$\frac{2}{7\cdot q}=\frac{1}{q}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{q}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\right)$$

Obtendo, assim, para:

$\frac{2}{49}$ e $\frac{2}{77}$, os seguintes desenvolvimentos:

$$\frac{2}{49}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196} \quad \text{e} \quad \frac{2}{77}=\frac{1}{44}+\frac{1}{308}$$

ꕥ É de referir que a construção da tabela, que data de mais de mil anos antes de Pitágoras, leva-nos a considerar o facto assinalável de os antigos egípcios já fazerem a distinção entre números primos e números compostos e, de igual modo, terem um entendimento prático do "Crivo de Eratóstenes".

ꕥ Regista-se, também, o facto de a fracção com o denominador primo *29* ser a primeira na qual o seu desenvolvimento tem quatro termos — como veremos mais adiante.

ℭ Acrescentando mais duas notas de espanto, referiremos que não se sabe qual a razão que levou a que, no desenvolvimento das fracções de denominadores *55* e *95*, se considerasse estes denominadores como múltiplos de *11* e de *19*, respectivamente, e não de *5*.

Assim:

$$\frac{2}{55} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{11} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{66} \right) \Leftrightarrow \frac{2}{55} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330}$$

e

$$\frac{2}{95} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{19} = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114} \right)^{*} \Leftrightarrow \frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$$

*: Ver o desenvolvimento da fracção $\frac{2}{19}$ no diapositivo 31.

◇ Após o desenvolvimento das fracções em que os denominadores foram os primos *3*, *5*, *7*, *11* (o *23* parece constar desta lista, de modo fortuito) — e os seus respectivos múltiplos —, iremos abordar os restantes denominadores primos, considerando a seguinte igualdade:

$$\frac{2}{p} - \frac{1}{a} = \frac{2a - p}{a \cdot p}$$

, sendo a um número conveniente tal que:

- $\frac{p}{2} < a < p$ e
- $2p - a$ possa ser representado como a soma de dois ou três divisores de *a*,

e assim, teremos a seguinte regra: $\frac{2}{p} = \frac{1}{a} + \frac{2a - p}{a \cdot p}$

- Considerando, então, a regra: $\frac{2}{p}=\frac{1}{a}+\frac{2a-p}{a\cdot p}$

a) Para: $p=13$ e $a=8$, teremos: $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{2\times 8-13}{8\times 13}=\frac{1}{8}+\frac{3}{104}$

mas como: $3=2+1$, então: $\frac{3}{104}=\frac{2}{104}+\frac{1}{104}$

assim: $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{2}{104}+\frac{1}{104}$ ou seja: $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$

b) Tentemos, de seguida, obter as fracções egípcias para,

bi) $p=17$ e $a=12$; bii) $p=19$ e $a=12$ biii) $p=29$ e $a=24$

Resp.: bi) $\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{2\times 12 - 17}{12\times 17} = \frac{1}{12} + \frac{7}{204}$, mas como: $7 = 4 + 3$,

então: $\frac{7}{204} = \frac{4}{204} + \frac{3}{204}$

e assim: $\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$

bii) $\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{2\times 12 - 19}{12\times 19} = \frac{1}{12} + \frac{5}{228}$, mas como: $5 = 3 + 2$

então: $\frac{5}{228} = \frac{3}{228} + \frac{2}{228}$

e assim: $\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$

biii) $\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{2 \times 24 - 29}{24 \times 29} = \frac{1}{24} + \frac{19}{696}$, mas como: $19 = 12 + 4 + 3$

então: $\frac{19}{696} = \frac{12}{696} + \frac{4}{696} + \frac{3}{696}$

e assim: $\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$

ɞ Mais um dos enigmas desta fabulosa tabela de intrincados enredos reside no facto de não se saber por que razão as fracções com denominadores *35*, *91* e *101* foram tratadas de forma autónoma.

◇ Passemos à abordagem dos dois primeiros números, dos três atrás referidos, recuperando a relação entre as médias Aritmética (A), Geométrica (G) e Harmónica (H):

$G^2 = H \times A$ ou seja: $\left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2 = \frac{a+b}{2} \times \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Leftrightarrow \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a+b}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

e, assim, obteremos seguinte igualdade:

$$\frac{2}{p \cdot q} = \frac{2}{p+q} \times \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$$

▪ É de assinalar que aquelas duas fracções — de denominadores 35 e 91 — são, de certo modo, as mais intrigantes da tabela, sendo as únicas, com denominadores compostos, cujas expansões não são obtidas como múltiplos simples dos desenvolvimentos de um dos seus factores primos.

- Recorramos, então à igualdade: $\dfrac{2}{p\cdot q}=\dfrac{2}{p+q}\times\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\right)$ para a obtenção dos desenvolvimentos de:

i) $\dfrac{2}{35}$ e ii) $\dfrac{2}{91}$; assim:

temos: i) $\dfrac{2}{35}=\dfrac{2}{5\times 7}=\dfrac{2}{5+7}\times\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}\right)$

ou seja: $\dfrac{2}{35}=\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42}$

e

ii) $\dfrac{2}{91}=\dfrac{2}{7\times 13}=\dfrac{2}{7+13}\times\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{13}\right)=\dfrac{1}{10}\times\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{13}\right)$

ou seja: $\dfrac{2}{91}=\dfrac{1}{70}+\dfrac{1}{130}$

◈ Encerraremos as nossas lucubrações sobre as igualdades constantes da esquiva tabela que temos estado a estudar, abordando o terceiro caso que, por sinal, é o último desenvolvimento que nela surge, com base na seguinte reflexão:

- Como *6* é um número perfeito, a soma dos inversos de todos os seus divisores (incluindo o próprio) é *2*;

i.e.: $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ e assim: $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} \times 2 = \frac{1}{101} \times \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right)$

então: $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$

ꗳ Ultrapassado que foi o tormentoso mar de muitos assombros, podemo-nos conceder uma pausa para cantar estas belas palavras retiradas da “Mensagem”, de Fernando Pessoa:

Deus ao mar o perigo e o abismo deu,
Mas nele é que espelhou o céu.

◈ Retomemos, brandamente, a nossa aventura de muitos encantos e sortilégios, com o sereno prazer da descoberta das coisas boas; indo, desta feita, ver como obter uma fracção egípcia, a partir de uma dada *fracção própria.*

- Dos vários métodos conhecidos para a obtenção de uma fracção egípcia, a partir de uma dada fracção, vamos abordar o método do *Algoritmo "guloso"* proposto por Fibonacci e que surge no seu *Liber Abaci*:

  - O método consiste em *retirar* a maior fracção unitária da fracção considerada em cada etapa (daí o nome do algoritmo):

    - Seja a fracção $\frac{t}{b}$, tal que:

      - $\frac{t}{b} < 1$;
      - Se $t = 1$, já estamos em presença de uma fracção egípcia;
      - Vamos, então estudar as situações em que $t > 1$.

- Iremos, com um exemplo, ilustrar o funcionamento do algoritmo:
  - Seja

como $17 \div 7 = 2{,}4\ldots$, então: $2 < 17 \div 7 < 3$, i.e.: $\frac{1}{3} < \frac{7}{17} < \frac{1}{2}$.

Assim, a maior fracção que cabe em $\frac{7}{17}$ é $\frac{1}{3}$,

Então $\frac{7}{17} = \frac{1}{3} + R_1$ e $R_1 = \frac{7}{17} - \frac{1}{3} = \frac{21-17}{51} = \frac{4}{51}$;

Agora repetimos o processo:

$51 \div 4 = 12{,}75$, logo: $\frac{4}{51} = \frac{1}{13} + R_2$ e $R_2 = \frac{4}{51} - \frac{1}{13} = \frac{52-51}{663} = \frac{1}{663}$;

como esta fracção é unitária, o processo terminou e obtemos, então, através do algoritmo “guloso”: $\frac{7}{17} = \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{663}$.

▪ Calculemos, através do algoritmo “guloso”, as fracções egípcias para as seguintes fracções:

a) $\frac{7}{16}$; b) $\frac{13}{17}$.

Resp.:a) $\frac{7}{16}=\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{240}$; b) $\frac{13}{17}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{68}$

• Como breve nota, é de assinalar que a fracção egípcia que o algoritmo “guloso” nos faculta pode não ser a menor fracção.

◈ Como deverá ter ficado implícito, aquando da verificação de algumas igualdades constantes da *esfíngica* tabela, é de fácil constatação que qualquer fracção pode ser representada por uma infinidade de fracções egípcias. Vejamos, de seguida, alguns exemplos:

◇ Recuperemos a seguinte igualdade: $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$;

Como sabemos da validez da seguinte igualdade: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$,

então podemos ter :i) $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}=\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{28}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{28}$,

ou seja: $\frac{2}{7}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{168}$,

ou: ii) $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}\times 1$

i.e.: $\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}+\frac{1}{168}$

ou ainda iii) $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{28} \times 1$

ou seja: $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{28} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right)$

i.e.: $\frac{2}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{56} + \frac{1}{84} + \frac{1}{168}$

- Obs.: De notar que, no papiro de Rhind, a expansão das fracções dadas não tem mais do que quatro termos.

◆ Obtenhamos outros desenvolvimentos para as seguintes fracções: a) $\frac{1}{7}$; b) $\frac{1}{11}$.

Resp.:a) $\frac{1}{7}=\frac{1}{7}\times 1=\frac{1}{7}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{7}=\frac{1}{14}+\frac{1}{21}+\frac{1}{42}$;

b) $\frac{1}{11}=\frac{1}{11}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{11}=\frac{1}{22}+\frac{1}{33}+\frac{1}{66}$.

▪ Nesta nossa deambulação pelos muitos enredos das fracções egípcias, vejamos, de seguida, o desenvolvimento para $\frac{4}{49}$:

◆ Consideremos, uma vez mais, a seguinte igualdade: $\dfrac{2}{7}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}$,

assim: $\dfrac{4}{7}=2\times\dfrac{2}{7}=2\times\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}\right)$, i.e.: $\dfrac{4}{7}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{14}$.

Teremos, então: $\dfrac{4}{49}=\dfrac{1}{7}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{1}{7}\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{14}\right)$; Ou seja: $\dfrac{4}{49}=\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{98}$,

que é equivalente a: $\dfrac{4}{49}=\dfrac{1}{14}\times 1+\dfrac{1}{98}=\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{98}\times 1$,

o que nos fornecerá os dois seguintes desenvolvimentos:

- $\dfrac{4}{49}=\dfrac{1}{14}\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)+\dfrac{1}{98}=\dfrac{1}{28}+\dfrac{1}{42}+\dfrac{1}{84}+\dfrac{1}{98}$

- $\dfrac{4}{49}=\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{196}+\dfrac{1}{294}+\dfrac{1}{588}$

◈ Mostraremos, a seguir, a extraordinária tabela, que surge no início do papiro Ahmes, com os surpreendentes desenvolvimentos para as fracções do tipo:

$$\frac{2}{n} \ , \quad n = 3, 5, 7, \ldots, 101$$

◆ Podemos, a título de exemplo, observar os desenvolvimentos de:

$\frac{2}{75}$, $\frac{2}{29}$ e $\frac{2}{101}$ que surgem, lá atrás, nos diapositivos: 24, 32 e 35, respectivamente.

◆ É digno do maior realce o notável facto de a tabela estar isenta de quaisquer erros.

2/3 = 1/2 + 1/6	2/5 = 1/3 + 1/15	2/7 = 1/4 + 1/28
2/9 = 1/6 + 1/18	2/11 = 1/6 + 1/66	2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104
2/15 = 1/10 + 1/30	2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68	2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114
2/21= 1/14 + 1/42	2/23 = 1/12 + 1/276	2/25 = 1/15 + 1/75
2/27 = 1/18 + 1/54	2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232	2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155
2/33 = 1/22 + 1/66	2/35 = 1/30 + 1/42	2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296
2/39 = 1/26 + 1/78	2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328	2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301
2/45 = 1/30 + 1/90	2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470	2/49 = 1/28 + 1/196
2/51 = 1/34 + 1/102	2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795	2/55 = 1/30 + 1/330
2/57 = 1/38 + 1/114	2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531	2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610
2/63 = 1/42 + 1/126	2/65 = 1/39 + 1/195	2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536
2/69 = 1/46 + 1/138	2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710	2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365
2/75 = 1/50 + 1/150	2/77 = 1/44 + 1/308	2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790
2/81 = 1/54 + 1/162	2/83 = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498	2/85 = 1/51 + 1/255
2/87 = 1/58 + 1/174	2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890	2/91 = 1/70 + 1/130
2/93 = 1/62 + 1/186	2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570	2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776
2/99 = 1/66 + 1/198	2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606	

◈ Consideremos, desta feita, as duas próximas tabelas que nos fornecem (para todas as fracções do tipo $\frac{T}{B}$):

◈ Tabela I : o número mínimo de termos de uma fracção egípcia para qualquer fracção, onde B toma valores até 30;

◈ A tabela II : o número de representações diferentes de uma fracção, na forma de fracção egípcia, com um número mínimo de termos:

- Nota: a) o símbolo "-" significa que a fracção não está na sua representação mínima

  b) o símbolo "." significa que a fracção obtida não é uma fracção própria, i.e., estamos em presença de uma fracção maior ou igual a 1.

Tabela I:

```
\B:                          1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 3
T\    3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
 2|   2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 -
 3|   . 2 2 - 3 2 - 2 2 - 3 2 - 2 2 - 3 2 - 2 2 - 2 2 - 2 2 -
 4|   . . 3 - 2 - 2 - 2 - 3 - 2 - 3 - 2 - 2 - 2 - 3 - 2 - 3 -
 5|   . . . 2 3 2 2 - 3 2 3 2 - 2 3 2 2 - 2 3 3 2 - 2 2 2 2 -
 6|   . . . . 3 - - - 2 - 3 - - - 2 - 3 - - - 2 - 2 - - - 2 -
 7|   . . . . . 3 3 2 3 2 2 - 3 3 3 2 3 2 - 3 3 2 3 2 2 - 3 2
 8|   . . . . . . 3 - 4 - 3 - 2 - 4 - 3 - 2 - 2 - 3 - 3 - 3 -
 9|   . . . . . . . 3 4 - 3 2 - 2 2 - 4 2 - 3 3 - 3 2 - 2 3 -
10|   . . . . . . . . 4 - 3 - - - 3 - 2 - 2 - 3 - - - 2 - 2 -
11|   . . . . . . . . . 3 3 3 3 3 3 2 3 2 2 - 3 2 3 3 3 2 3 2
12|   . . . . . . . . . . 4 - - - 3 - 3 - - - 2 - 4 - - - 4 -
13|   . . . . . . . . . . . 4 3 3 3 3 3 3 3 2 3 2 2 - 3 3 3 2
14|   . . . . . . . . . . . . 3 - 4 - 4 - - - 3 - 3 - 2 - 4 -
15|   . . . . . . . . . . . . . 4 4 - 4 - - 3 4 - - 2 - 2 2 -
16|   . . . . . . . . . . . . . . 5 - 3 - 3 - 4 - 3 - 3 - 3 -
17|   . . . . . . . . . . . . . . . 3 4 3 3 3 4 3 3 3 3 3 3 2
18|   . . . . . . . . . . . . . . . . 4 - - - 4 - 3 - - - 4 -
19|   . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 3 3 4 3 3 4 3 3 4 3
20|   . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 - 4 - - - 4 - 4 -
21|   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 5 - 3 4 - - 4 -
22|   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 - 4 - 4 - 3 -
23|   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3 4 4 3 3 4 3
24|   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 - - - 4 -
25|   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 4 3 4 -
26|   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 - 4 -
27|   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4 5 -
28|   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5 -
29|   . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
```

Tabela *II* :

\B T\	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	.	1	-	1	-	1	-	2	-	1	-	1	-	4	-	1	-	1	-	4	-	1	-	2	-	3	-	1	-
3	.	.	1	1	-	6	2	-	2	1	-	8	3	-	2	1	-	8	4	-	2	1	-	1	3	-	3	1	-
4	.	.	.	2	-	1	-	1	-	1	-	4	-	3	-	4	-	1	-	2	-	1	-	10	-	2	-	7	-
5	.	.	.	.	1	3	1	1	-	3	2	5	1	-	1	5	2	1	-	1	15	8	3	-	1	1	2	1	-
6	.	.	.	.	.	1	-	-	-	1	-	1	-	-	-	1	-	2	-	-	-	1	-	1	-	-	-	1	-
7	.	.	.	.	.	.	2	2	1	2	2	1	-	7	5	3	1	5	2	-	5	3	2	10	1	1	-	2	2
8	.	.	.	.	.	.	.	1	-	16	-	3	-	2	-	23	-	2	-	1	-	1	-	3	-	6	-	4	-
9	.	.	.	.	.	.	.	.	1	5	-	1	1	-	1	1	-	14	1	-	3	2	-	8	1	-	1	1	-
10	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	-	1	-	-	-	3	-	1	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	-
11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	1	1	2	2	1	1	3	1	1	-	1	1	2	3	3	1	4	2
12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	-	-	-	1	-	1	-	-	-	1	-	47	-	-	-	29	-
13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	6	2	1	1	2	1	5	4	1	2	1	1	-	2	5	1	1
14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	-	2	-	5	-	-	-	1	-	4	-	1	-	10	-
15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	4	-	3	-	-	1	13	-	-	1	-	1	1	-
16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	39	-	1	-	1	-	7	-	1	-	4	-	2	-
17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	2	1	1	2	4	1	1	2	4	2	1
18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	-	-	-	5	-	1	-	-	-	14	-
19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	2	1	8	2	2	6	6
20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	-	4	-	-	-	8	-	5	-
21	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	3	37	-	1	4	-	-	4	-
22	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	23	-	6	-	6	-	1	-
23	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	3	5	1	1	3	3
24	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-	-	-	1	-
25	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	4	1	5	-
26	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	-	1	-
27	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	5	20	-
28	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	16	-
29	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	7

Vejamos alguns exemplos:

I) $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ ou seja: $\frac{2}{3}=[2,6]$:

podemos observar que para $T = 2$ e $B = 3$,surgem, nas tabelas I e II , os números 2 e 1, respectivamente.

II) $\frac{2}{9}=[5,45]=[6,18]$: podemos observar que para $T = 2$ e $B = 9$, surgem, em ambas as tabelas, o número 2.

III) $\frac{7}{8}=[2,3,24]=[2,4,8]$: podemos verificar que, nesta situação, surgem, nas tabelas I e II , os números 3 e 2, respectivamente.

Veremos ainda, na parte final desta nossa breve aventura de muitos prodígios, os métodos usados pelos antigos egípcios para as operações de multiplicação e divisão:

O papiro de Rhind permite que percebamos claramente que a:

- multiplicação era baseada em duplicações e adições;
- divisão era baseada em multiplicações…

Vamos, de seguida, tentar reproduzir o processo utilizado para as duas operações, com alguns exemplos.

◆ Vamos reproduzir o processo de multiplicação socorrendo-nos de duas colunas.
Consideremos a multiplicação: 41×59 .

• Escolhemos um dos números — por exemplo, o *59* — para colocar no topo de uma das colunas;

• Escrevemos, então, o número *1* no topo da outra coluna, que será a coluna da esquerda;

• Duplicamos os números, das duas colunas, até obtermos, na coluna que começou com o *1*, todas as potências de 2 que sejam menores ou iguais que 41. Neste caso suspendemos o processo no *32*.

• Assinalam-se as linhas, da coluna que começa com o 1, cuja soma seja igual a *41*.

• Adicionado os números, nas mesmas linhas, da outra coluna, obtemos o resultado da multiplicação.

▪ Vejamos, a seguir, a construção do processo:

1	59
2	118
4	236
8	472
16	944
32	1888

- A potência de base 2 a seguir ao 32 seria o 64, que já é maior que 41, logo o processo de duplicação está terminado.

1	59 ✓
2	118
4	236
8	472 ✓
16	944
32	1888 ✓

- Na coluna da esquerda, temos que:

$$41 = 32 + 8 + 1$$

- Na coluna da direita, ao efectuar a soma dos números correspondentes obtemos:

$$1888 + 472 + 59 = 2419$$

- Assim: $41 \times 59 = 2419$

◆ Vamos reproduzir o processo de divisão — que é equivalente ao utilizado para a multiplicação — socorrendo-nos, igualmente, de duas colunas.

Consideremos a divisão: $1495 \div 65$: “Operar com *65* para obter *1495*”.

- Coloquemos o número *65* no topo de uma das colunas;
- Escrevemos o número *1* no topo da outra coluna (a coluna da esquerda);
- Duplicamos os números das duas colunas até obtermos, na coluna que começou com o 65, todas as potências de 2 que sejam menores ou iguais que 1495;
- Assinalam-se as linhas, da coluna que começa com o 65, cuja soma seja igual a *1495*.
- Adicionado os números, das mesmas linhas, da outra coluna, obtemos o resultado da divisão.

▪ Vejamos, a seguir, a construção do processo:

1	65
2	130
4	260
8	520
16	1040

- A potência de base 2 a seguir ao 1040 seria o 2080, que já é maior que 1495, logo o processo de duplicação está terminado.

1	65 ✓
2	130 ✓
4	260 ✓
8	520
16	1040 ✓

- Na coluna da direita, temos que:

$$1040 + 260 + 130 + 65 = 1495$$

- Na coluna da esquerda, ao efectuar a soma dos números que constam das mesmas linhas obtemos:

$$16 + 4 + 2 + 1 = 23$$

- Assim: $1495 \div 65 = 23$

- Vejamos um caso em que a divisão não é inteira:
  "Operar com *8* para obter *35*".

1	8
2	16
4	32 ✓
$1/2$	4
$1/4$	2 ✓
$1/8$	1 ✓

Duplicamos os números das duas colunas até obtermos, na coluna que começou com o 8, o número cujo o seu dobro seria maior que 35; suspendemos, então, o processo no número 32. De seguida, começamos a dividir por 2 o divisor até obtermos os números que adicionados a 32 vão nos dar o valor do dividendo. Teremos, assim: $32+2+1=35$

Efectuando as respectivas divisões com os números da coluna da esquerda, concluiremos que:

$$35 \div 8 = 4 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

- Efectuemos as seguinte operações:

a) 12×23 ; b) $138 \div 6$; c) $16 \div 3$.

Resp.: a)

1	23
2	46
4	92 ✓
8	184 ✓

$184 + 92 = 276$

$$12 \times 23 = 276$$

b)

1	6 ✓
2	12 ✓
4	24 ✓
8	48
16	96 ✓

$6 + 12 + 24 + 96 = 138$

$$138 \div 6 = 1 + 2 + 4 + 16$$

$$\Leftrightarrow 138 \div 6 = 23$$

c)

1	3 ✓
2	6
4	12 ✓
$2/3$	2
$1/3$	1 ✓

$3 + 12 + 1 = 16$

$$16 \div 3 = 5 + \frac{1}{3}$$

De notar que, em c), para obter a terça parte do divisor, os antigos egípcios calcularam, primeiramente, os dois terços do número, para depois obterem a sua metade!

Já mesmo nos momentos finais desta nossa jornada, em que vislumbramos uns laivos do fascinante mundo das fracções egípcias, disponhamos um pouco mais deste nosso tempo de muitas contemplações, para entrever a resolução de equações do primeiro grau, fazendo uso dos denominados “números auxiliares vermelhos” (representados, aqui, a ***negrito*** nas duas situações seguintes), que são uma forma insofismável de utilização do conceito de ”mínimo múltiplo comum”. Resolvamos, então, o problema 21 do papiro de Rhind:

- Complete $\frac{2}{3} + \frac{1}{15}$ para obter 1.

Resp.: $\text{mmc}(3,15)=\text{mmc}(3,3\times 5)=3\times 5=15$, assim temos:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{15}+x=1\Leftrightarrow\frac{30}{3}+\frac{15}{15}+15x=15$$, ou seja: $10+1+15x=15$

mas $10+1+4=15$, então $15x=4\Leftrightarrow x=\frac{4}{15}=\frac{3+1}{15}\Leftrightarrow x=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$;

teremos assim: $\frac{2}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}=1\Leftrightarrow\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=1$;

recorrendo à regra que nos dá os desenvolvimentos para as fracções cujo denominador é múltiplo de *3 (vd.* Regra no diapositivo 24*)*, e expandindo a último termo, teremos, assim, como prova da validade da solução obtida a seguinte apresentação:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=1$$

- Tentemos resolver a seguinte questão:

Complete $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ para 1.

Resp.: $\text{mmc}(3, 4, 28) = \text{mmc}(3, 3^2, 2^2 \times 7) = 3 \times 2^2 \times 7 = 84$

No entanto, em vez de 84, o escriba egípcio considerou que 42 seria suficiente. Assim temos:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+x=1 \Leftrightarrow \frac{84}{3}+\frac{42}{4}+\frac{42}{28}+42x=42$$

.

ou seja: $28+\left(10+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\mathbf{42}x=42$

mas: $28+\left(10+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\mathbf{2}=42$

então: $\mathbf{42}x=\mathbf{2}\Leftrightarrow x=\frac{2}{42}\Leftrightarrow x=\frac{1}{21}$

E a apresentação final (servindo como prova) seria:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{21}=1$$

◆ Como mais um vislumbre dos muitos sortilégios com que nos temos deparado nesta nossa curta aventura, referiremos que o método dos “números auxiliares vermelhos” também era utilizado para obter a expansão de uma fracção dada, como veremos nos dois exemplos seguintes:

$$\frac{2}{95}=\frac{2}{95}\times\frac{12}{12}=\frac{24}{1140}=\frac{\mathit{19}+\mathit{3}+\mathit{2}}{1140}\text{, logo: }\frac{2}{95}=\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570}$$

e

$$\frac{3}{53}=\frac{3}{53}\times\frac{20}{20}=\frac{24}{1140}=\frac{\mathit{53}+\mathit{4}+\mathit{2}+\mathit{1}}{1060}\text{, logo: }\frac{3}{53}=\frac{1}{20}+\frac{1}{265}+\frac{1}{530}+\frac{1}{1060}$$

A encerrar esta nossa sinóptica, mas prodigiosa aventura, vejamos uma das várias conjecturas associadas às fracções egípcias:

Conjectura de Erdöes-Strauss

Para qualquer número inteiro $n \geq 2$, existem três números inteiros a, b e c para os quais se verifica a seguinte condição:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

- Estamos, assim, em presença de uma condição conversível numa *equação diofantina*, envolvendo fracções egípcias!

Por exemplo: para $n = 5$, a equação tem duas soluções (2, 4, 20) ou (2, 5, 10). (Como se poderá observar, lá atrás, na tabela II)

- De tudo o que atrás foi visto, é de toda a justeza finalizarmos com a seguinte frase:

"A coisa mais bela que podemos experimentar é o mistério"

Albert Einstein