

Coeficientes

BÍNOMIAIS

Triângulo de Pascal

e

Binômio de Newton

□ 2ª Parte:

Binômio de Newton

& O teorema binomial, fórmula binomial ou expansão binomial permite-nos escrever o desenvolvimento de qualquer potência de um binómio. Assim, a expressão algébrica $(a + b)^n$ expande-se na forma de um polinómio cujos termos $ka^p b^m$ são tais que verificam as seguintes condições:

- i) os expoentes p e m são números inteiros não negativos tais que: $p + m = n$
- ii) o coeficiente k é um número binomial da forma $\binom{n}{p}$.

& A expansão de um binómio pode ser apresentada de forma concisa através da seguinte expressão:

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cdot a^{n-p} \cdot b^p$$

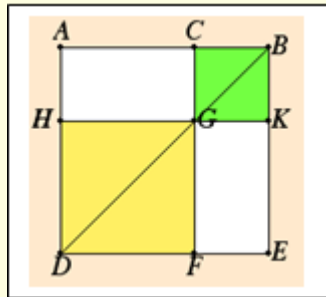
Onde cada coeficiente k é-nos dado pela seguinte regra: $k = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n - p)!}$,

cujos valores podemos, facilmente, obter com recurso ao denominado triângulo de Pascal, já abordado anteriormente.

& O Teorema Binomial tem sido de uma enorme relevância no desenvolvimento das matemáticas, tanto no âmbito da análise, como da álgebra.

& A mais antiga representação conhecida do chamado Binómio de Newton pode ser encontrada no Séc. IV a.C., nos *Elementos* de Euclides em II.4: “Se uma linha recta for cortada em duas partes quaisquer, o quadrado do todo será igual ao quadrado das partes juntamente com o rectângulo das mesmas partes, tomado duas vezes.”

◇ Se considerarmos: $\overline{AC} = a$ e $\overline{CB} = b$, em linguagem algébrica, teremos:



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

& Recuperemos a expressão algébrica $(a + b)^n$:

Para: $n = 0$, teremos: $(a + b)^0 = 1$

Para: $n = 1$, teremos: $(a + b)^1 = a + b$

Para: $n = 2$, teremos: $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

Para: $n = 3$, teremos: $(a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) = a^3 + \dots$

◇ Vejamos, então, a utilidade do elegante teorema binomial — e a simplicidade do seu uso ...:

♦ Para $n = 3$, ficamos com a seguinte representação:

$$(a + b)^3 = \sum_{p=0}^3 \binom{3}{p} \cdot a^{3-p} \cdot b^p$$

Para: $p = 0$, temos: $\binom{3}{0} \cdot a^{3-0} \cdot b^0 = 1 \cdot a^3 \cdot 1 = a^3$

Para: $p = 1$, temos: $\binom{3}{1} \cdot a^{3-1} \cdot b^1 = 3 \cdot a^2 \cdot b^1 = 3a^2b$

Para: $p = 2$, temos: $\binom{3}{2} \cdot a^{3-2} \cdot b^2 = 3 \cdot a^1 \cdot b^2 = 3ab^2$

Para: $p = 3$, temos: $\binom{3}{3} \cdot a^{3-3} \cdot b^3 = 1 \cdot a^0 \cdot b^3 = b^3$

◇ Assim a expansão de um binómio de grau 3 terá a seguinte representação:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

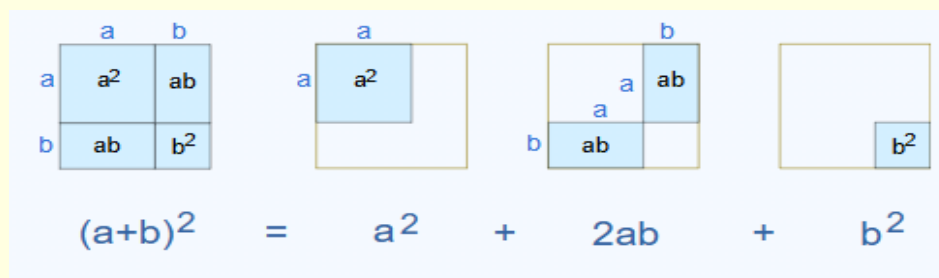
& Atentemos nas seguintes notas:

- i) Uma vez que binómio tem grau $n = 3$, podemos, de forma expedita, ir buscar os coeficientes do polinómio obtido à linha 3 do triângulo de Pascal.
- ii) O expoente do primeiro termo começa em $n = 3$ e vai diminuindo até 0 e, ao invés, o expoente do segundo termo começa em $p = 0$ e vai aumentando até 3 .
- iii) Em cada parcela, a soma dos expoentes dá-nos o grau do binómio.
- iv) Como o binómio é de grau $n = 3$, o seu desenvolvimento vai ter 4 parcelas.

& Vejam, de seguida, num breve parêntesis, a expansão do binómio,
no âmbito da Geometria:

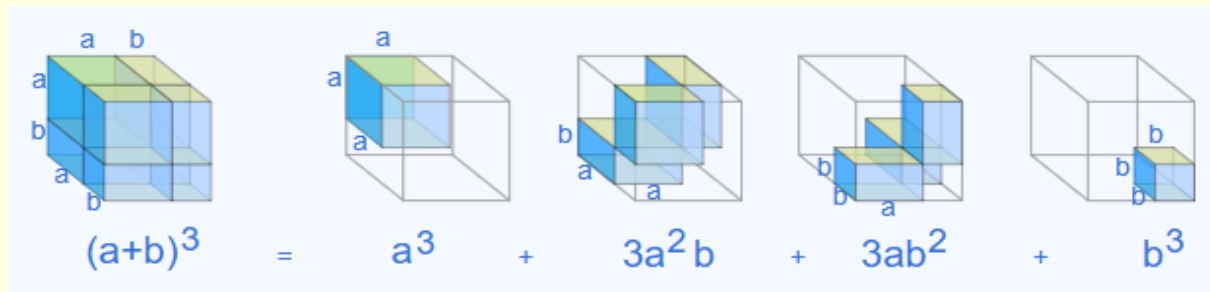
▣ Para: $n = 2$, temos (ver diapositivo 6):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



□ E para: $n = 3$, temos:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



& Após este breve interregno, atentemos no desenvolvimento do binómio para o caso geral:

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cdot a^{n-p} \cdot b^p \\ &= \binom{n}{0} \cdot a^{n-0} \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n\end{aligned}$$

& Vejam os alguns exemplos, em guisa de passatempo ...

(I) Prove que: $(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$.

Resolução:

Cálculo auxiliar:

1º: Como estamos em presença de um binómio de grau $n = 4$, vamos à 4ª linha do triângulo numérico para obter os **coeficientes** do desenvolvimento – ver nota i) – e teremos então:

1; 4; 6; 4; 1

♦ Obs: as notas i) e ii) constam do diapositivo 10

2º: Recuperando a nota ii), ficamos com os seguintes desenvolvimentos para $(a + b)^4$:

$$\begin{aligned} & a^4 \cdot b^0 + a^3 \cdot b^1 + a^2 \cdot b^2 + a^1 \cdot b^3 + a^0 \cdot b^4 = \\ & = a^4 \cdot 1 + a^3 \cdot b + a^2 \cdot b^2 + a \cdot b^3 + 1 \cdot b^4 \\ & = a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

e para $(a - b)^4 = (a + (-b))^4$:

$$\begin{aligned} & a^4 \cdot (-b)^0 + a^3 \cdot (-b)^1 + a^2 \cdot (-b)^2 + a^1 \cdot (-b)^3 + a^0 \cdot (-b)^4 = \\ & = a^4 \cdot 1 - a^3 \cdot b + a^2 \cdot b^2 - a \cdot b^3 + 1 \cdot b^4 \\ & = a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

3º: Colocando os coeficientes do ponto 1º nos desenvolvimentos do ponto 2º, obteremos:

$$\begin{aligned}(a + b)^4 &= 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 b + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4 \\ &= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(a - b)^4 &= 1 \cdot a^4 - 4 \cdot a^3 b + 6 \cdot a^2 b^2 - 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4 \\ &= a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

4º) Teremos, então:

$$\begin{aligned}(a + b)^4 - (a - b)^4 &= \\ &= (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) - (a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - a^4 + 4a^3b - 6a^2b^2 + 4ab^3 - b^4 \\ &= 8a^3b + 8ab^3\end{aligned}$$

Colocando $8ab$ em evidência, obtemos o pretendido:

$$(a + b)^4 - (a - b)^4 = \dots = 8a^3b + 8ab^3 = 8ab(a^2 + b^2)$$

(II) Considere um cubo cujo lado é, em centímetros, $l = x + \sqrt{3}$.

Mostre que, se $x = \sqrt{2}$, o volume do cubo é: $(9\sqrt{3} + 11\sqrt{2})\text{cm}^3$.

Resolução:

O volume do cubo é dado por: $l^3 = (x + \sqrt{3})^3$;

Assim, com $x = \sqrt{2}$:

$$l^3 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^3$$

Cálculo auxiliar:

1º: Como estamos em presença de um binómio de grau $n = 3$, vamos à 3ª linha do triângulo numérico para obter os coeficientes do desenvolvimento e teremos então:

1; 3; 3; 1

2º: Recuperando a nota ii), ficamos com o seguinte desenvolvimento para $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3$:

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{3})^0 + (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{3})^1 + (\sqrt{2})^1 \cdot (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^0 \cdot (\sqrt{3})^3 \\ &= \sqrt{2^3} \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot 3 + 1 \cdot \sqrt{3^3} = 2\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Breve nota: $\sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2^1} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$

3º: Colocando os coeficientes do ponto 1º no desenvolvimento do ponto 2º, obteremos:

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} + \sqrt{3})^3 &= \\ &= 1 \times 2\sqrt{2} + 3 \times 2 \cdot \sqrt{3} + 3 \times 3\sqrt{2} + 1 \times 3\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{3} = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}\end{aligned}$$

Como queríamos provar.

(III) Considere a função polinomial: $f(x) = \frac{x^4}{2}$.

Escreva na forma de polinómio reduzido a expressão: $f(x + 2)$.

Resolução:

$$f(x + 2) = \frac{(x + 2)^4}{2}$$

Cálculo auxiliar:

1º: Como estamos em presença de um binómio de grau $n = 4$, vamos à 4ª linha do triângulo numérico para obter os **coeficientes** do desenvolvimento, e teremos então:

1; 4; 6; 4; 1

2º: Recuperando a nota ii), ficamos com o seguinte desenvolvimento para $(x + 2)^4$:

$$\begin{aligned}x^4 \cdot 2^0 + x^3 \cdot 2^1 + x^2 \cdot 2^2 + x^1 \cdot 2^3 + x^0 \cdot 2^4 &= \\= x^4 \cdot 1 + 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 1 \cdot 16 &= \\= a^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 &= \end{aligned}$$

3º: Colocando os coeficientes do ponto 1º no desenvolvimento do ponto 2º, obteremos:

$$\begin{aligned}(x + 2)^4 &= 1 \times a^4 + 4 \times 2x^3 + 6 \times 4x^2 + 4 \times 8x + 1 \times 16 \\&= a^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16\end{aligned}$$

Assim, teremos:

$$\begin{aligned} f(x+2) &= \frac{(x+2)^4}{2} = \frac{a^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16}{2} \\ &= \frac{1}{2}a^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 8 \end{aligned}$$

(V) Considere a função polinomial $g(x - 1) = 2x^3$.

Escreva na forma de polinómio reduzido a expressão: $g(x)$.

$$\text{Solução: } g(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$$

& Vejamos, de seguida, como obter um qualquer termo do binómio $(a + b)^n$ sem ter a necessidade de calcular a expressão algébrica de todos os seus termos. Qualquer termo T de ordem k é calculado através da seguinte expressão:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

(I) Calculemos, a título de exemplo, o terceiro termo de $(a + b)^3$:
que é:

$$T_3 = T_{2+1} = \binom{3}{2} \cdot a^{3-2} \cdot b^2 = 3ab^2$$

Como podemos verificar na expressão que consta do *diapositivo 13* ...

(II) Do desenvolvimento de $(x^2 + 2)^5$ resulta um polinómio reduzido.
Determine o terceiro termo desse polinómio.

Solução: $40x^6$

& Continuando na nossa deambulação em torno do teorema binomial, adiantaremos que na Europa do Séc. XVI, surgem os estudos sobre o triângulo numérico levados a cabo por insignes matemáticos como os italianos Tartaglia e Cardano, o francês Viète e o alemão Michael Stifel (1487-1567), que cunhou o termo “Coeficiente binomial”.

& No século seguinte, surgem os nomes dos matemáticos ingleses John Wallis e Henry Briggs e do padre francês Marin Mersenne associados ao fabuloso triângulo. Sinalizaremos, de igual modo, que foi o matemático francês Pierre R. de Montmort quem, pela primeira vez, em 1708, nomeou o triângulo numérico como “Triângulo de Pascal”.

& Em 1665, influenciado pelos estudos de John Wallis, mas levando mais longe os estudos então efectuados, o ínclito matemático, físico, astrónomo e alquimista inglês Isaac Newton (1643 - 1727) levou a cabo a generalização da expansão binomial, para permitir, desse modo, o uso de quaisquer expoentes diferentes de inteiros não negativos, i.e., estendendo os expoentes a qualquer número real arbitrário – positivo ou negativo.

O teorema binomial passou a ter a seguinte representação:

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k$$

◆ Nessa generalização, a soma finita foi substituída por uma série infinita. Ancorado neste notável feito desta figura cimeira da Revolução Científica que teve lugar na Europa dos séculos XVI e XVII, chamemos até nós dois belos versos do prestigioso Alexandre O'Neill:

*“O infinito? Diz-lhe que entre.
Faz bem ao infinito estar entre gente.”*

-
- ▣ Embora Newton não se tenha preocupado com a convergência da série, sabe-se, por estudos posteriores desenvolvidos pelos conspícuos matemáticos Euler, Abel e Gauss, que a série converge* para qualquer valor de α , se $|x| < 1$.

Obs.(*): uma série diz-se convergente, quando a soma de todos os seus termos existir e for finita.

& Dando aos coeficientes binomiais a seguinte representação:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{k} &= \frac{\alpha!}{k! \cdot (\alpha - k)!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \dots (\alpha - (k - 1)) \cdot (\alpha - k)!}{k! \cdot (\alpha - k)!} \\ &= \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \dots (\alpha - (k - 1))}{k!} \\ &= \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \dots (\alpha - k + 1)}{k!}\end{aligned}$$

obteremos, para vários valores de k , os seguintes coeficientes:

$$\binom{\alpha}{0} = \frac{\alpha!}{0! \cdot (\alpha - 0)!} = \frac{\alpha!}{1 \cdot (\alpha)!} = 1$$

$$\binom{\alpha}{1} = \frac{\alpha!}{1! \cdot (\alpha - 1)!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)!}{1 \cdot (\alpha - 1)!} = \alpha$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha!}{2! \cdot (\alpha - 2)!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2)!}{2! \cdot (\alpha - 2)!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2!}$$

$$\binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha!}{3! \cdot (\alpha - 3)!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot (\alpha - 3)!}{3! \cdot (\alpha - 3)!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2)}{3!}$$

Ou seja:

$$\binom{\alpha}{0} = 1; \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha; \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2!}; \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2)}{3!}$$

◇ Logo, o desenvolvimento do binómio apresenta-se-nos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k = \binom{\alpha}{0} \cdot x^0 + \binom{\alpha}{1} \cdot x^1 + \binom{\alpha}{2} \cdot x^2 + \binom{\alpha}{3} \cdot x^3 + \dots = \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2)}{3!} x^3 + \dots \end{aligned}$$

- ▣ A título de exemplo, vamos calcular um valor aproximado da $\sqrt{2}$, com recurso à generalização da expansão binomial apresentada por Newton:

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1} = (1+1)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!} + \dots$$

- ◆ Simplifiquemos a expressão anterior com os seguintes cálculos auxiliares:

$$\diamond \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{-\frac{1}{4}}{2} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \diamond \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right)}{3!} &= \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right)}{6} = \frac{-\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} - 2\right)}{6} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2}\right)}{6} = \frac{-\frac{1}{4} \times \left(-\frac{3}{2}\right)}{6} = \frac{\frac{3}{8}}{6} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{3 \times 1}{8 \times 3 \times 2} = \frac{1}{8 \times 2} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

- ▣ Obteremos, assim, com recurso aos primeiros quatro termos da expansão binomial, o seguinte valor aproximado para a $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = (1+1)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1,4375$$

- ◆ Recordemos, tão-só, a título de comparação, o valor aproximado do número irracional $\sqrt{2}$ utilizando o mesmo número de quatro casas decimais obtidas na expansão:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \quad (4 \text{ c.d.})$$

& No termo desta nossa venturosa e mui prazenteira aventura, quedemo-nos um pouco mais neste território de todos os sortilégios, para que nos possamos acercar de mais um extraordinário e surpreendente resultado proporcionado pela generalização do teorema binomial.
Vamos, neste olhar derradeiro, tentar apreender um pouco do maravilhamento que envolve o fabuloso número de Neper.

◇ O notável número $e = 2,71828182\ 8459 \dots$, que para além de irracional é também um número transcendente, pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

▣ Recuperemos, então, a generalização do teorema binomial realizada por Newton:

$$\begin{aligned}
 e &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-(k-1)) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1) \cdot \frac{1}{n \cdot n \cdot n \dots n} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n}
 \end{aligned}$$

◆ Quando $n \rightarrow +\infty$ temos: $\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} = 1 \times \dots \times 1 = 1$

Ficamos, então, com:

$$\begin{aligned} e &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \times 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \dots \end{aligned}$$

i.e.:

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2,71806 \text{ (5 c.d.)}$$

◇ Ao fazer uso dos primeiros sete termos da expansão binomial, obtemos o seguinte valor aproximado para o número de Neper:

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2,71806 \text{ (5 c.d.)}$$

que, como podemos observar, fornece-nos um valor exacto de e até à casa das milésimas.

& A finalizar, diremos, tão-só, que as primeiras referências ao admirável número de Neper, ou número de Euler, surgiram publicadas, em 1618, num apêndice de um trabalho do matemático escocês John Napier (1550 - 1617) sobre logaritmos.

☞ Encerramos, assim, o fugaz olhar que lançamos sobre os *Coefficientes Binomiais* – que, para um melhor entendimento, foram abordados em dois andamentos:

Triângulo de Pascal

e

Binômio de Newton