Coeficientes Binomiais

Triângulo de Pascal
e
Binómio de Newton

- 1ª Parte:

  Triângulo de Pascal

- O triângulo de Pascal é um triângulo numérico infinito formado por números binomiais ${}^{n}C_{p}$ onde n representa o número da linha e p representa o número da posição na linha onde se situa o número binomial.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \rightarrow \textit{Linha } 0 \\
 & & 1 & & 1 & & \rightarrow \textit{Linha } 1 \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \rightarrow \textit{Linha } 2 \\
\underset{\textit{posição } 0}{1} & & \underset{\textit{posição } 1}{3} & & \underset{\textit{posição } 2}{3} & \underset{\textit{posição } 3}{1} & \rightarrow \textit{Linha } 3
\end{array}
$$

E. g.: ${}^{3}C_{2} = 3$

- O conhecimento mais recuado que se tem do chamado triângulo de Pascal (P., Blaise; 1623 – 1662) está associado matemático indiano Pingala, que pensa-se que viveu no Séc. III a.C..
- Pingala discorreu sobre o dito triângulo na sua obra *Chandashastra,* na qual faz um estudo exaustivo sobre a métrica do Sânscrito, fazendo, pela primeira vez, uso do sistema de numeração binário.
- Pingala e os académicos indianos seus contemporâneos faziam uso da palavra, em sânscrito, *sunya* para se referirem ao número zero ou ao vazio ...

- No Séc. VI, o matemático indiano Varahamihira, nos comentários que fez à obra de Pigala, apresentou uma clara descrição da forma aditiva

  dos coeficientes binomiais: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

- Mais tarde, já no Séc. X, o matemático e poeta indiano Halayudha também se debruçou sobre o triângulo numérico.

- Ainda no Séc. X, o matemático persa Al-Karaji, através da construção de um esquema em tudo similar ao denominado triângulo de Pascal, contribuiu para o desenvolvimento do teorema binomial.

- É digno do maior realce que Al-karaji, sem as ferramentas da indução matemática, que foram estabelecidas mais tarde, tenha usado a "indução matemática" para provar a expansão do binómio, através do teorema binomial, até $n = 5$.

- Al-karaji também demonstrou que a soma dos n primeiros números naturais pode ser obtida pela seguinte fórmula: $\frac{1}{2}n(n+1)$.

- Outra das duas contribuições, no âmbito da Matemática, foi a descoberta da espantosa identidade: $(1+2+3+\ldots+10)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots 10^3$.

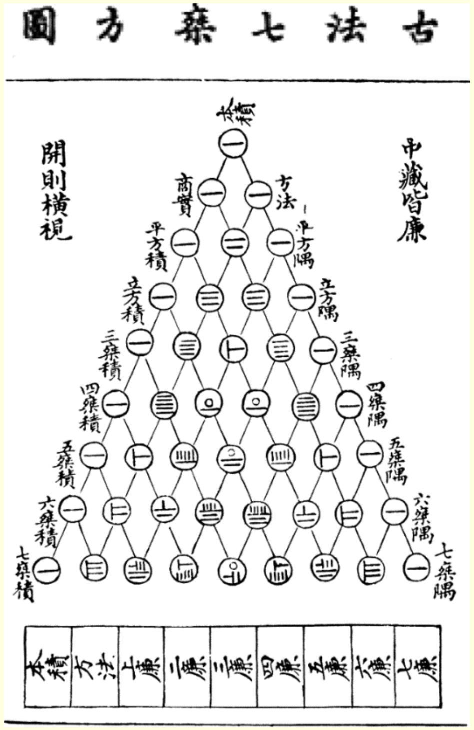
- Os chineses, no Séc. XI, também chegaram ao conhecimento do chamado triângulo de Pascal.

- O matemático chinês Chia Hsien ou Jia Xiam (c. 1010 – c. 1070) sabia haver uma estreita relação entre a extração de raízes e a obtenção de coeficientes binomiais através do triângulo numérico.

- Através dos escritos do matemático chinês Yang Hui (1238 – 1298), ficamos a saber que Chia Hsien dominava o método para a construção do triângulo numérico.

- Yang Hui construiu um triângulo numérico até à sexta linha, com base nos estudos de Chia Hsien, cujos trabalhos, entretanto, se perderam.

- Na China, o triângulo numérico é conhecido como triângulo de Yang Hui.



Como breves notas, podemos adiantar que Yang Hui:

i) provou que :

$$1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

(soma dos números triângulares)

ii) deu importantes contributos para o estudo dos quadrados mágicos, aos quais chamou, simplesmente, diagramas de números.

- O matemático indiano Bháskara II (1114 - 1185) também se debruçou sobre o estudo do triângulo numérico, sendo proficiente no cálculo do número de permutações, combinações e de arranjos de n elementos.

- Sabe-se, também, que o poeta, astrónomo e matemático persa Omar Khayyam (1048 – 1131) discorreu sobre o chamado triângulo de Pascal.

Omar Khayyam:

- Obteve raízes de equações algébricas com recurso aos coeficientes binomiais e à expansão binomial.

- Dirigiu uma equipa que se encarregou da reforma do calendário e mediu a duração de um ano solar como tendo 365,24219858156 dias; sabe-se, hoje, que um ano solar tem 365,242190 dias;

- Escreveu Rubaiyat, um conjunto de belos poemas, que ficariam famosos no Ocidente a partir da tradução realizada pelo poeta inglês Edward Fitzgerald, que foi publicada em 1859.

- Saboreemos um *quarteto* deste belo e longo poema:

A aragem da Primavera
Refresca e aviva o corpo das rosas
E na sombra anilada do horto
Acaricia o rosto da minha amada

- Muito provavelmente, o triângulo numérico chegou à Europa através dos árabes.

- O primeiro registo que se conhece do triângulo na Europa surge, no Séc. XIII, na obra *De arithmetica* do matemático Jordanus de Nemore.

- Ao humanista, matemático e astrónomo alemão Petrus Apianus (1495-1552) é atribuído o primeiro registro impresso do triângulo, quando ele o apresenta na folha de rosto de um livro seu publicado em 1527.

- O triângulo numérico era amplamente conhecido antes de Pascal, no entanto foi ele que, primeiramente, reuniu toda a informação respeitante ao triângulo na sua obra "*Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*", de 1655.

- Pascal apresentou uma expressão para os coeficientes binomiais, tal como hoje a conhecemos:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))(n-p)!}{p!(p-p)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))}{p!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\ldots1}$$

- Como breve nota, sinalizaremos que os estudos de Blaise Pascal estão, juntamente com os de Pierre de Fermat (1601 – 1665), na origem do Cálculo das Probabilidades.

- Blaise Pascal – “o coração tem razões que a própria razão desconhece” – foi matemático, físico e escritor. Escreveu, e. g., “Les provinciales” (dezoito cartas) e “Pensées” (textos de carácter religioso).

- O chamado “Triângulo de Pascal” é conhecido na Itália como “Triângulo de Tartaglia” (Niccolò Fontana; 1500 - 1557).

- Tartaglia (o “gago”) descobriu a solução para as equações do terceiro grau; a sua tradução comentada dos *Elementos* de Euclides para italiano, publicada em 1543, foi a primeira tradução para uma língua moderna.

- Sabemos que o triângulo de Pascal dá-nos, como vimos atrás, os números binomiais, ou combinações, que podem ser representados por:

$$\binom{n}{p} \quad \text{ou} \quad {}^{n}C_{p}\ .$$

- Vejamos, a seguir, algumas propriedades do triângulo numérico:

- i) $$^{n}C_{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Ex.: Escolhamos um número na linha $n = 4$ e na posição $p = 2$. Teremos:

$$^{4}C_{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{24}{2 \times 2} = \frac{24}{4} = 6$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 *6* 4 1

1 5 10 10 5 1

- ii) $^{n}C_{p} = {}^{n}C_{n-p}$ (o triângulo é simétrico)

Ex.: Na linha $n = 5$, o número na posição $p = 2$ é igual ao número na posição $p = 5\text{-}2$, ou seja, $p = 3$:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 *10* *10* 5 1

$$^{5}C_{2} = {}^{5}C_{5-2} \Leftrightarrow {}^{5}C_{2} = {}^{5}C_{3}$$

- iii) $^{n}C_{p} + {}^{n}C_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$ (regra para a construção do triângulo; conhecida como relação de Stifel)

Ex.: O número na linha n+1 = *5* e na posição *p+1 = 3* *é* obtido através da soma dos números na linha *n = 4* e nas posições *p = 2* e *p+1 = 3*:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & \mathit{6} & & \mathit{4} & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & \mathit{10} & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$^{4}C_{2} + {}^{4}C_{2+1} = {}^{4+1}C_{2+1} \Leftrightarrow {}^{4}C_{2} + {}^{4}C_{3} = {}^{5}C_{3}$$

- iv) A soma de todos os números de uma dada linha *n* é igual a 2^n

Ex.: A soma de todos os números da linha $n = 3$ é:

$$1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^{3}$$

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		*3*		*3*		*1*		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

- Aumentemos um pouco mais a nossa capacidade de observação e contemplemos mais alguns dos encantos que o triângulo se dispõem a nos ofertar:

- A segunda diagonal do triângulo dá-nos a sequência dos números naturais.

- A terceira diagonal do triângulo dá-nos a sequência dos números triangulares.

1 $\rightarrow$ Linha 0

1 1 $\rightarrow$ Linha 1

1 2 1 $\rightarrow$ Linha 2

1 3 3 1 $\rightarrow$ Linha 3

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Diagonal dos números naturais

Diagonal dos números triângulares

- Se nos atentarmos à diagonal do triângulo que faculta os números triangulares, poderemos ao longo dela obter os *quadrados perfeitos*: A soma de dois números triangulares consecutivos dá-nos um quadrado perfeito, i.e.:

$$ {}^{n}C_2 + {}^{n+1}C_2 = n^2 $$

(De reparar que que os valores de *n* dispõem-se ao longo da segunda diagonal.)

Ex. (para n = 3):

$$ {}^{3}C_2 + {}^{4}C_2 = 3 + 6 = 3^2 = 9 $$

1

1 1

1 2 1

1 3 **3** 1

1 4 **6** 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

- Podemos também observar que, no âmbito do Cálculo Combinatório, o triângulo de Pascal faculta-nos o número de combinações pretendidas. Vejamos o seguinte exemplo:

  - A Dona Leonor, mãe de quatro filhos (Ana, Bruno, Carlos e Dora), escolhe sempre dois deles para a ajudarem nas tarefas do dia a dia.

  - De quantos modos distintos pode a Dona Leonor fazer a escolha? :

    AB, AC, AD, BC, BD, CD. (existem 6 hipóteses de escolha)

    - De notar que: $6 = {}^{4}C_{2}$

  - E se escolher três? :

    ABC, ABD, ACD, BCD. (existem 4 hipóteses de escolha)

    - De notar que: $4 = {}^{4}C_{3}$

- Detenhamo-nos em mais uma propriedade que o triângulo encerra:

"Se n é um número primo, então todos os coeficientes $^{n}C_{p}$, com $1 < p < n$ são divisíveis por p."

- Vejamos um exemplo: Seja $n = 7$;

  assim, com $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a expressão $^{7}C_{p}$ vai nos gerar

  os números: 7, 21, 35, 35, 21, 7

  (todos os números obtidos são múltiplos do número primo 7)

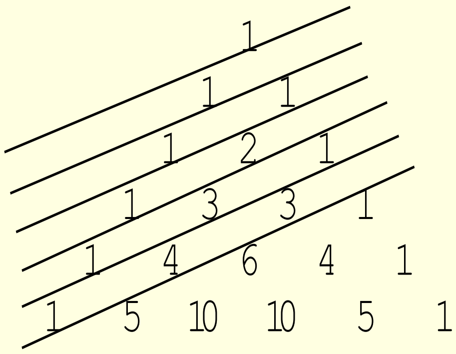
- O triângulo de Pascal também nos oferece a sequência dos números de Fibonacci.

  - Recordemos, primeiramente, como obter os números de Fibonacci:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \,,\ \forall \text{n} \in \aleph \end{cases}$$

e, assim, teremos:

u_1	u_2	u_3	u_3	u_5	u_6	u_7	u_8	…
1	1	2	3	5	8	13	21	…



- Números de Fibonacci (no triângulo de Pascal) :

  1; ***1*** ; *1+1=**2*** ; *1+2=**3*** ; *1+3+1=**5*** ; *1+4+3=**8*** ; ...

- Tentemos lobrigar mais um dos prodígios deste “poço-sem-fundo” que parece ser o triângulo de Pascal!

Pontos sobre uma circunferência…:

i) Marquemos um ponto, dois pontos, três pontos, quatro pontos, …, sobre uma circunferência.

Para cada uma das situações anteriores, desenhemos no respetivo círculo:

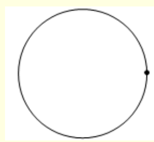
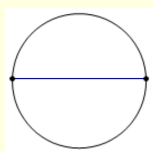
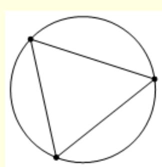
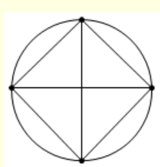
ii) segmentos de reta, cujos extremos são os pontos traçados,

iii) polígonos, cujos vértices são, mais uma vez, os pontos marcados.

Construamos, então, uma tabela para tentarmos descortinar regularidades:

Imagem	Círculos	Pontos	Segmentos	Triângulos	Quadrados	…
…	…	…	…	…	…	…

- Pontos sobre uma circunferência...

Imagem	Círculos	Pontos	Segmentos	Triângulos	Quadrados	...
	1	1				
	1	2	1			
	1	3	3	1		
	1	4	6	4	1	

- Contemplemos mais uma da infindáveis propriedades do triângulo!

  O padrão do stick de hóquei:

A soma dos primeiros n elementos de uma diagonal é igual ao elemento abaixo do último número somado, na próxima diagonal.

1

1 1

1 2 1

1 **3** 3 1

1 4 **6** 4 1

1 5 **10** 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

- O triângulo de Pascal também abriga em si as potências de 11 ...:

  - Consideremos, primeiramente, as primeiras cinco linhas doa triângulo:

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
 & & & & 1 & & & & & & \rightarrow \text{Linha } 0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & \rightarrow \text{Linha } 1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \rightarrow \text{Linha } 2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \rightarrow \text{Linha } 3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \rightarrow \text{Linha } 4
\end{array}
$$

- Vejamos, então, o desenvolvimento das potências de 11:

$$Linha\ 0: \quad 11^0 = 1 \cdot 10^0 = 1$$

$$Linha\ 1: \quad 11^1 = 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 10 + 1 = 11$$

$$Linha\ 2: \quad 11^2 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 100 + 20 + 1 = 121$$

$$Linha\ 3: \quad 11^3 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 1000 + 300 + 30 + 1 = 1331$$

$$Linha\ 4: \quad 11^4 = 1 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = 14641$$

- Observemos, ainda que:
  - a maior potência de cada soma corresponde ao respectivo número da linha;
  - os coeficientes das potências são os elementos da respectiva linha;
  - a potência de 11 corresponde à maior potência apresentada na soma, i.e., o número da linha.

Números de Mersenne no triângulo de Pascal!

- Os números de Mersenne representam-se por: $M_p = 2^p - 1;\ p \in IN$

Três notas:

i) Os sete primeiros de Mersenne são: 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127.

i) Se esses números forem primos são chamados números primos de Mersenne.

ii) Hoje sabe-se que se $2^p - 1$ é primo então p também é primo; no entanto p pode ser primo e $2^p - 1$ não o ser.

- Passemos, então, a tentar divisar os números de Mersenne no triângulo de Pascal:

- Números de Mersenne no triângulo de Pascal...

♦ Relembremos a propriedade já vista atrás:

$$\sum_{p=0}^{n} {}^{n}C_{p} = 2^{n}$$ (Ver diapositivo 22)

assim, a soma das primeiras *n* linhas do triângulo é um número de Mersenne:

$$M_n = \sum_{p=0}^{n-1} 2^p = 2^n - 1$$

♦ Vejamos, de seguida, um exemplo:

-

Se, por exemplo, *n=4* :

$$\sum_{p=0}^{4-1} 2^p = 2^4 - 1 \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{3} 2^p = 16 - 1 \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{3} 2^p = 15 = M_4$$

Obs.: $\sum_{p=0}^{3} 2^p = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$

- Podemos ainda ver , a seguir, outra relação entre o triângulo de Pascal e os números de Mersenne:

- Se n é um número de Mersenne, então todos os coeficientes binomiais ${}^{n}C_{p}$ são ímpares, com $0 \leq p \leq n$:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
\mathbf{1} \quad \mathbf{1} \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
\mathbf{1} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{1} \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
\mathbf{1} \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{21} \quad \mathbf{35} \quad \mathbf{35} \quad \mathbf{21} \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{1}
\end{array}
$$

- Prolonguemos um pouco mais o nosso assombro, encerrando este nosso breve olhar à volta do fabuloso triângulo de Pascal atentando nos *números de Catalan* que se encontram obductos no respectivo triângulo:

    - Vejamos, previamente, como obter os números de Catalan:

      Eugène Catalan (1814 - 1894) ofereceu-nos as seguintes igualdades para o cálculo dos números que trazem o seu nome:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}; \ \forall n \in \aleph_0$$

- A igualdade

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

esconde
um delicioso tesouro:
cada número de Catalan pode
ser obtido, dividindo o coeficiente
binomial central por *n+1*.
E.g.: *20* está na linha *6* , i.e.: *2n = 6* , e
assim *n = 3* ; então:

$$C_3 = \frac{1}{3+1} \times 20 = \frac{20}{4} = 5$$

1
1 1
1 **2** 1
1 3 3 1
1 4 **6** 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 **20** 15 6 1

♦ Vejamos um outro modo de obter números de Catalan escondidos no triângulo de Pascal.

A igualdade

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

diz-nos que a diferença entre um coeficiente binomial central e o coeficiente adjacente na mesma linha é um número de Catalan.
E.g.: *6* está na linha *4*, i.e.: *2n = 4*, e assim *n = 2*; então:

$$C_2 = \binom{2\times 2}{2} - \binom{2\times 2}{2+1} = \binom{4}{2} - \binom{4}{3} = 6 - 4 = 2$$

1
1 1
1 **2** 1
1 3 3 1
1 4 **6** 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 **20** 15 6 1

- Concluímos aqui o breve olhar que lançamos sobre o

Triângulo de Pascal

– a primeira de duas partes que dedicamos aos

Coeficientes Binomiais